UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENG. DE COMPUTAÇÃO E AUTOMAÇÃO

INTRODUÇÃO À MODELAGEM DE SISTEMAS DINÂMICOS

Natal-RN, Março de 2005

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

$$\text{Tipos de modelo}\begin{cases} \text{- Simulação}\begin{cases}\text{- Computador}\\ \text{- Escala}\end{cases} \\ \text{- Dinâmicos}\begin{cases}\text{- Análise}\\ \text{- Identificação}\end{cases}\end{cases}$$

- <u>Modelos dinâmicos:</u> modelos matemáticos formados por um conjunto de equações diferenciais. São utilizados para a análise e projeto em controle.

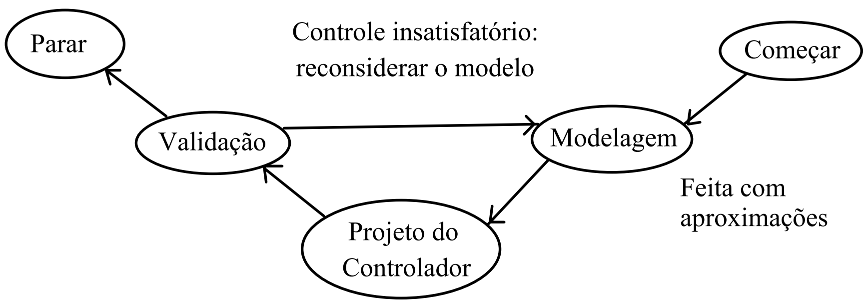
- <u>Modelos dinâmicos por análise:</u> modelos em forma de equações diferenciais e que envolvem simplificações.

- <u>Modelos dinâmicos por identificação:</u> modelos obtidos por observações de um sistema.

- <u>Modelos por simulação:</u> usados na investigação empírica das propriedades de um sistema ou processo.

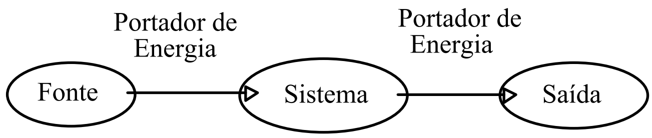
- <u>Modelos por simulação computacional:</u> formulação matemática do comportamento de um sistema que pode ser implementada em um computador analógico ou digital.

- <u>Modelos por simulação em escala:</u> usados em fenômenos complexos. Passam pela construção de réplicas para posterior análise.



Processo de Modelagem

2 VARIÁVEIS GENERALIZADAS E ELEMENTOS DE SISTEMAS



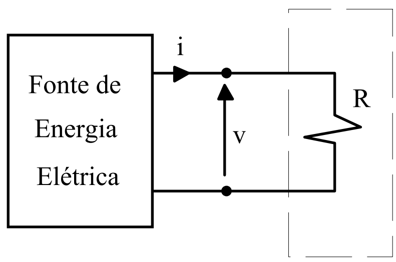
- Sistemas: manipuladores de energia que interagem com as entradas e saídas via portas de energia

$$\text{Elementos Básicos}\begin{cases}\text{- armazenamento de energia}\\ \text{- geração de energia}\\ \text{- dissipação de energia}\end{cases}$$

2.1 Variáveis de Sistema

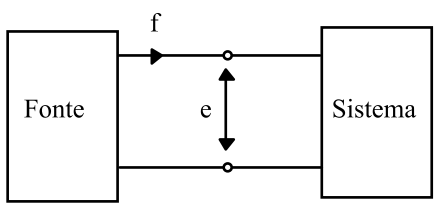
Determinam como e em que sentido a energia é transmitida.

Exemplo:

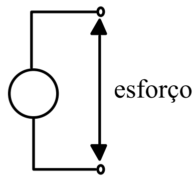


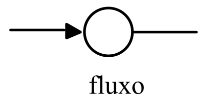
- Sistema: resistor
- Portas: fios
- Variáveis de sistema: tensão (v) e corrente (i) Potência = v.i

2.1.1 *ESFORÇO e FLUXO: Variáveis Generalizadas de Sistemas*



Sentido Generalizado: esforço (e) e fluxo (f)



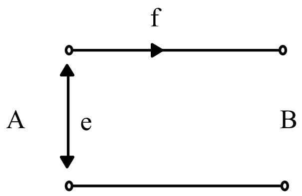


- Medidores de esforço: voltímetros, termomêtros, barômetros
- Medidores de fluxo: amperímetros, medidores de vazão, dinamômetros.

Esforço ⇒ Variável ENTRE (*across variable*)

Fluxo ⇒ Variável ATRAVÉS (*through variable*)

2.1.2 Potência e Energia



Pot = e.f (ou proporcional a)

$$E_{ab}(t_1) = \int_0^{t_1} e.f\ dt$$

2.1.3 Energia Armazenada e Estado

$$\text{Energia Armazenada} = \int_0^{t_1} \text{e.f dt}$$

$$\text{Mecanismos armazenadores de energia} \begin{cases} \text{- armazenadores de esforço} \\ \text{- armazenadores de fluxo} \end{cases}$$

Esforço Acumulado (e_a)

$$e_a = \int_0^t e\,\mathrm{dt} \quad \text{ou} \quad \mathrm{e} = \frac{\mathrm{de_a}}{\mathrm{dt}}$$ ex: indutor

$$\text{Energia acumulada} = \int_0^t \text{ef dt} = \int_0^{e_a} \text{f de}_a$$

Fluxo Acumulado (f_a)

$$f_a = \int_0^t f\, dt \quad \text{ou} \quad f = \frac{df_a}{dt} \qquad\qquad \text{ex: capacitor}$$

$$\text{Energia acumulada} = \int_0^t ef\, dt = \int_0^{f_a} e\, df_a$$

$(e_a, f_a, e, f) \Rightarrow$ especificam a história temporal do fluxo de energia no sistema

Estado de um Sistema

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n; u_1, u_2, ..., u_r) \qquad i = 1,2,..,n$$

$(e_a, f_a) \Rightarrow$ conjunto natural de variáveis de estado de um sistema

2.2 Elementos Básicos de Sistemas

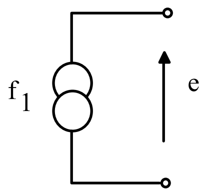
$$\text{Fontes de Energia} \begin{cases} \text{- fonte de variáveis entre} & \text{(fontes de esforço)} \\ \text{- fonte de variáveis através} & \text{(fontes de fluxo)} \end{cases}$$

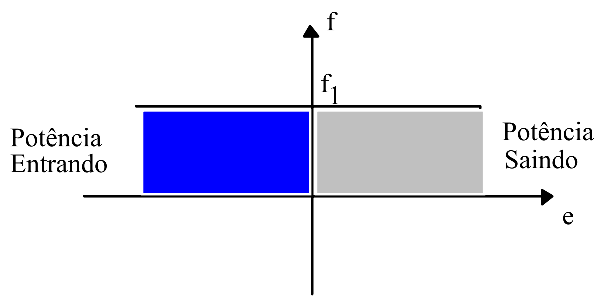
$$\text{Armazenadores de Energia} \begin{cases} \text{- armazenadores de varáveis entre} \\ \text{- armazenadores de varáveis através} \end{cases}$$

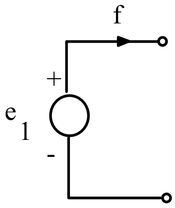
Dissipadores de Energia

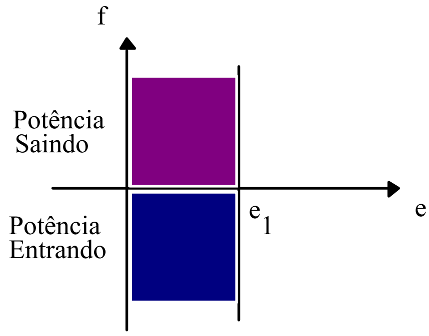
<u>- Propriedade Constitutiva:</u> qualquer curva experimental ou lei que especifica a característica física de um elemento do sistema.

2.2.1 Propriedades Constitutivas de Fontes de Energia



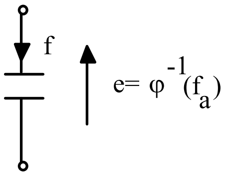






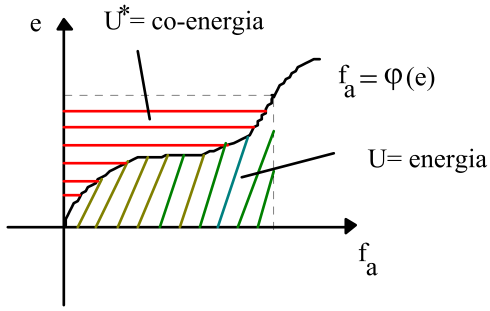
2.2.2 Propriedades Constitutivas de Armazenadores de Energia

Armazenadores de Fluxo



$$f_a = \varphi(e)$$

$$U = \int_0^t efdt = \int_0^{f_a} edf_a$$

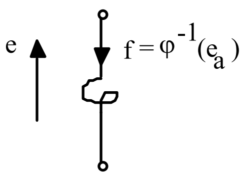


$$U = \int_0^{f_a} \varphi^{-1}(f_a)df_a = ef_a - U^* \qquad e = \frac{\partial U}{\partial f_a}$$

$$U^* = \int_0^e f_a de \qquad f_a = \frac{\partial U^*}{\partial e}$$

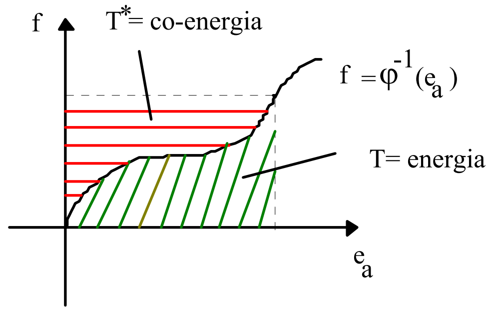
Se $f_a = Ce$ (linear) temos que:
$$\left.\begin{aligned} U &= ef_a - U^* = Ce^2 - U^* \\ U^* &= \int_0^e f_a de = \int_0^e Cede = \frac{1}{2}Ce^2 \end{aligned}\right\} U = U^* = \frac{1}{2}Ce^2$$

Armazenadores de Esforço



$$e_a = \varphi(f)$$

$$T = \int_0^t efdt = \int_0^{e_a} fde_a$$



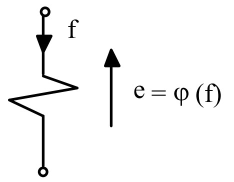
$$T = \int_0^{e_a} \varphi^{-1}(e_a)de_a = e_a f - T^* \qquad e_a = \frac{\partial T}{\partial f}$$

$$T^* = \int_0^f e_a df \qquad f = \frac{\partial T}{\partial e_a}$$

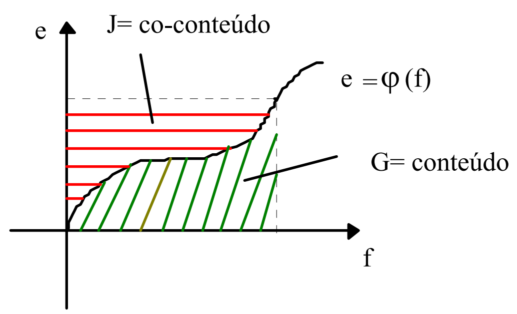
Se $e_a = Lf$ (linear) temos que:

$$\left.\begin{aligned} T &= e_a f - T^* = Lf^2 - T^* \\ T^* &= \int_0^f e_a df = \int_0^f Lfdf = \frac{1}{2}Lf^2 \end{aligned}\right\} T = T^* = \frac{1}{2}Lf^2$$

2.2.3 Propriedades Constitutivas de Dissipadores de Energia



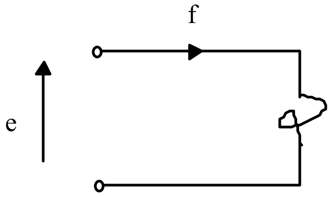
$$e = \varphi(f)$$

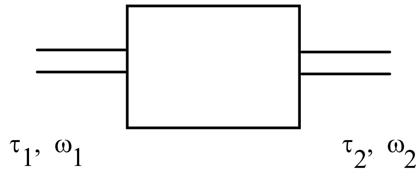


$$\mathrm{ef} = \int_0^f \mathrm{edf} + \int_0^e \mathrm{fde} = \mathrm{G} + \mathrm{J} \qquad \mathrm{e} = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{f}}; \qquad \mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial \mathrm{e}}$$

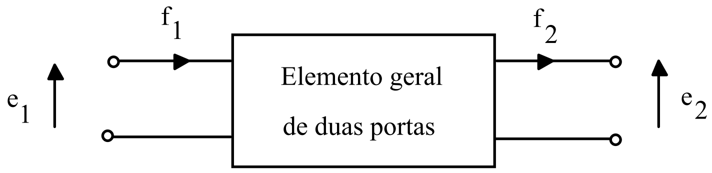
Se e= Rf (linear) temos que: $\mathrm{G} = \mathrm{J} = \frac{1}{2}\mathrm{Rf}^2$

2.3 Elementos Adicionais de Sistemas





$$\omega_2 = n\omega_1$$
$$\tau_1 = n\tau_2$$



Conservação de Potência: $e_1 f_1 = e_2 f_2$

<u>- Elemento de duas portas conservativas lineares:</u>

$$\begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMADOR IDEAL

$$e_1 = ne_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = \frac{1}{n} f_2$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

n $\Rightarrow$ módulo de transformação

GIRADOR IDEAL

$$e_1 = rf_2 \qquad \Rightarrow \qquad f_1 = \frac{1}{r} e_2$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

r $\Rightarrow$ módulo de giração

3 ELEMENTOS BÁSICOS EM SISTEMAS MECÂNICOS, ELÉTRICOS, FLUÍDOS, MAGNÉTICOS E TÉRMICOS

3.1 Sistemas Mecânicos

Podem ser translacionais e rotacionais.

- Velocidade $\Rightarrow$ entre um ponto e a referência $\Rightarrow$ Variável ENTRE
- Força $\Rightarrow$ da referência para um ponto $\Rightarrow$ Variável ATRAVÉS

3.1.1 *Translacionais*

Tipos de Analogia:

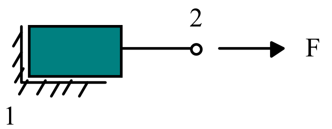
1)	Velocidade	$\Rightarrow$ Esforço	(Analogia da Mobilidade) ou
	Força	$\Rightarrow$ Fluxo	(Analogia do Movimento)
2)	Velocidade	$\Rightarrow$ Fluxo	(Analogia Clássica)
	Força	$\Rightarrow$ Esforço	

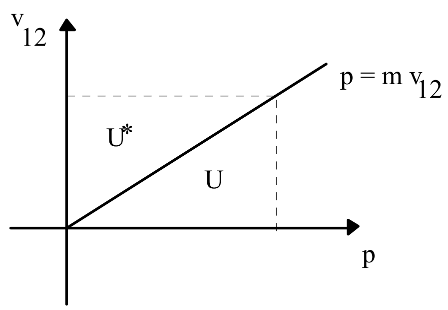
Massa Translacional

$$p = mv \quad \begin{cases} \text{p} \rightarrow \text{momento} \\ \text{m} \rightarrow \text{massa} \\ \text{v} \rightarrow \text{velocidade} \end{cases}$$

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma \quad \begin{cases} \text{F} \rightarrow \text{força} \\ \text{a} \rightarrow \text{aceleração} \end{cases}$$

$$\text{F} = \frac{\text{dp}}{\text{dt}} \quad \Rightarrow \quad \text{p} = \int \text{Fdt}$$ $\Rightarrow$ Armazenador de fluxo

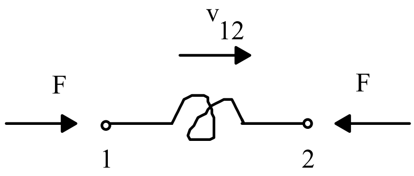


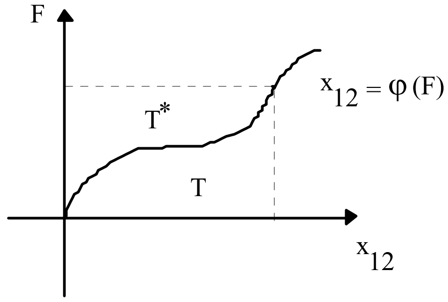


$$U = U^* = \frac{1}{2}mv_{12}^2$$

Mola Translacional

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \int v dt \quad \begin{cases} \text{x} \rightarrow \text{posição} \\ \text{v} \rightarrow \text{velocidade} \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{Armazenador de esforço}$$

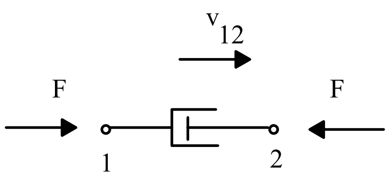


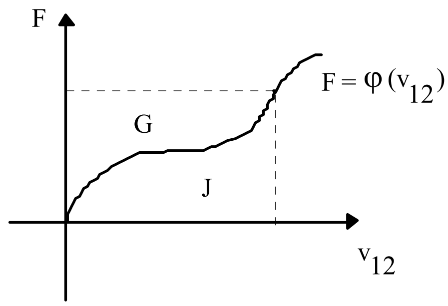


Lei de Hooke:

$$F = kx_{12} \quad \Rightarrow \quad x_{12} = \frac{1}{k}F \quad \Rightarrow \quad \text{T} = \text{T}^* = \frac{1}{2k}F^2 = \frac{1}{2}kx_{12}^2$$

Dissipação Translacional





Se $F = bv_{12}$ $\left(\text{b} \rightarrow \text{coeficiente de atrito viscoso}\right)$, então

$$J = G = \frac{1}{2}bv_{12}^2$$

$$Potência = bv_{12}^2 = \frac{F^2}{b}$$

3.1.2 Rotacionais

Tipos de Analogia:

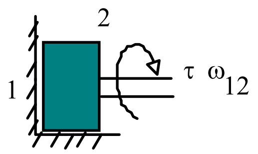
1)	Velocidade angular	$\Rightarrow$ Esforço	(Analogia da Mobilidade) ou
	Torque	$\Rightarrow$ Fluxo	(Analogia do Movimento)
2)	Velocidade angular	$\Rightarrow$ Fluxo	(Analogia Clássica)
	Torque	$\Rightarrow$ Esforço	

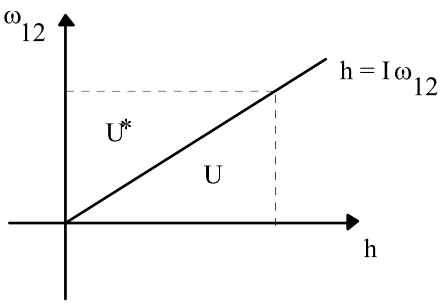
Massa Rotacional

$$h = I\omega \quad \begin{cases} \text{h} \rightarrow \text{momento angular} \\ \text{I} \rightarrow \text{momento de inércia} \\ \omega \rightarrow \text{velocidade angular} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{dh}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad \begin{cases} \tau \rightarrow \text{torque} \\ \alpha \rightarrow \text{aceleração angular} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{dh}{dt} \;\Rightarrow\; \text{h} = \int \tau dt \qquad \Rightarrow \text{Armazenador de fluxo}$$

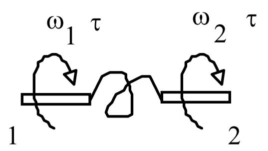


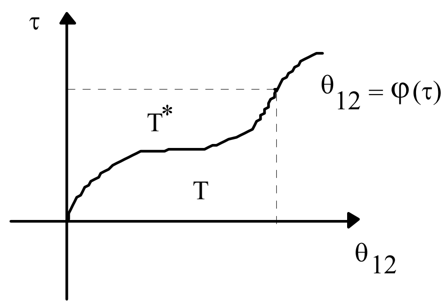


$$U = U^* = \frac{1}{2} I \omega_{12}^2$$

Mola Rotacional

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \theta = \int \omega dt \quad \begin{cases} \theta \rightarrow \text{posição angular} \\ \omega \rightarrow \text{velocidade angular} \end{cases} \quad \Rightarrow \text{Armazenador de esforço}$$

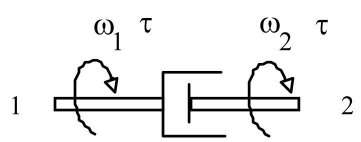


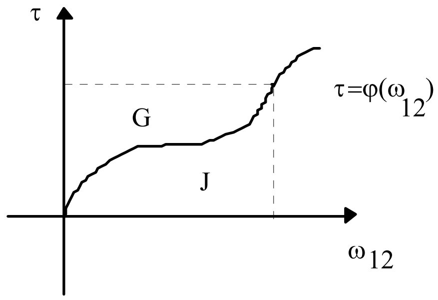


Se a relação constitutiva da mola for linear, então:

$$\tau = k\theta_{12} \;\Rightarrow\; \theta_{12} = \frac{1}{k}\tau \;\Rightarrow\; \mathrm{T} = \mathrm{T}^* = \frac{1}{2}k\theta_{12}^2$$

Dissipação Rotacional





Se $\tau = b\omega_{12}$ $\left(b \rightarrow \text{ coeficiente de atrito viscoso}\right)$, então

$$J = G = \frac{1}{2}b\omega_{12}^2$$

$$Potência = b\omega_{12}^2 = \frac{\tau^2}{b}$$

3.2 Sistemas Elétricos

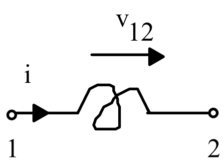
- <u>- Tensão</u> ⇒ Variável <u>ENTRE</u> ⇒ Variável de <u>ESFORÇO</u>
- <u>- Corrente</u> ⇒ Variável <u>ATRAVÉS</u> ⇒ Variável de <u>FLUXO</u>

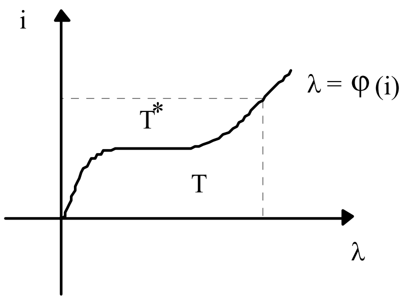
Indutância

Armazena energia no campo magnético.

$\lambda = \varphi(i)$ $\lambda \rightarrow$ fluxo magnético concatenado

$v = \dfrac{d\lambda}{dt} \;\Rightarrow\; \lambda = \int v dt$ ⇒ Armazenador de esforço





Para o caso linear:

$$\lambda = Li \quad \Rightarrow \qquad T = T^* = \frac{\lambda^2}{2L} = \frac{1}{2}Li^2$$

Indutor constituído por uma bobina com N espiras:

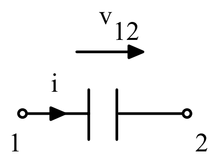
$$L = N^2\,\frac{\mu a}{l}\begin{cases} L \;\rightarrow \text{Indutância} \\ N \rightarrow \text{Número de espiras} \\ \mu \rightarrow \text{Permeabilidade} \\ a \;\rightarrow \text{Área de seção transversal do circuito magnético} \\ l \;\rightarrow \text{Comprimento médio do circuito magnético} \end{cases}$$

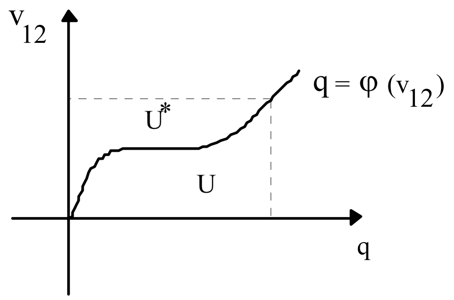
Capacitância

Armazena energia no campo elétrico.

$q = \varphi(v)$ q $\rightarrow$ carga elétrica

$i = \dfrac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad q = \int idt$ $\Rightarrow$ Armazenador de fluxo





Para o caso linear:

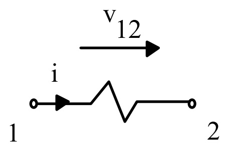
$$q = Cv_{12} \qquad \Rightarrow \qquad U = U^* = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}Cv_{12}^2$$

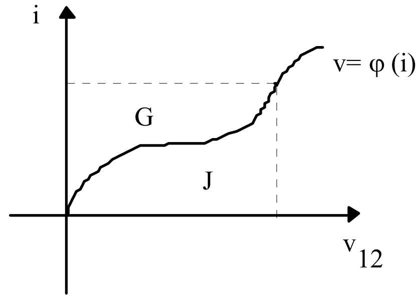
- Capacitor de placas paralelas:

$$C = \frac{\varepsilon a}{d}\begin{cases} C \rightarrow \text{Capacitância} \\ \varepsilon \;\rightarrow \;\text{Permissividade} \\ a \;\rightarrow \text{Área das placas} \\ l \;\rightarrow \text{Distância entre as placas} \end{cases}$$

Resistência

Dissipação de energia elétrica: $v = \varphi(i)$





Para o caso linear:

$$v_{12} = Ri \quad \Rightarrow \quad G = J = \frac{1}{2}Ri^2$$

$$P = Ri^2 = \frac{v_{12}^2}{R}$$

- Fio de área constante e comprimento l:

$$R = \frac{\rho l}{a}\begin{cases} R \rightarrow \text{Resistência elétrica} \\ \rho \rightarrow \text{Resistividade do material} \\ l \rightarrow \text{Comprimento do fio} \\ a \rightarrow \text{Área da seção transversal do fio} \end{cases}$$

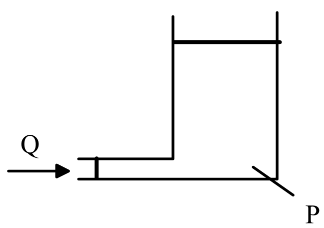
3.3 Sistemas Fluidos

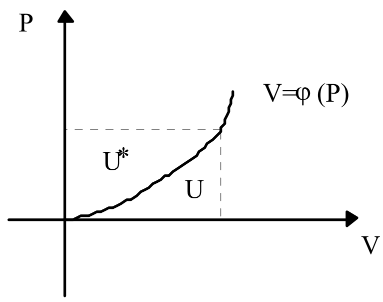
<u>- Pressão fluida</u> ⇒ Variável <u>ENTRE</u> ⇒ Variável de <u>ESFORÇO</u>

<u>- Vazão fluida</u> ⇒ Variável <u>ATRAVÉS</u> ⇒ Variável de <u>FLUXO</u>

Capacitância Fluida <u>(Armazenador de Fluxo)</u>

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad \rightarrow \quad V = \int Q dt \quad \Rightarrow \quad \text{armazenador de fluxo}$$



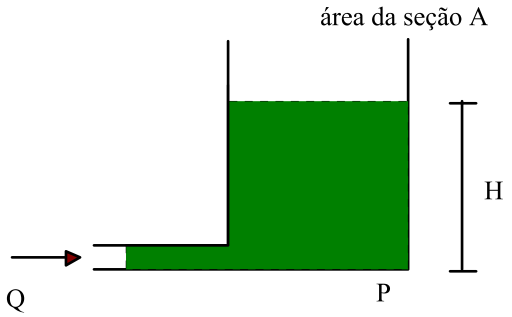


$$U = \int_0^V P dV \; ; \qquad U^* = \int_0^V V dP$$

Para o caso linear:

$$V = C_f P \quad \Rightarrow \quad U = U^* = \frac{1}{2} C_f P^2$$

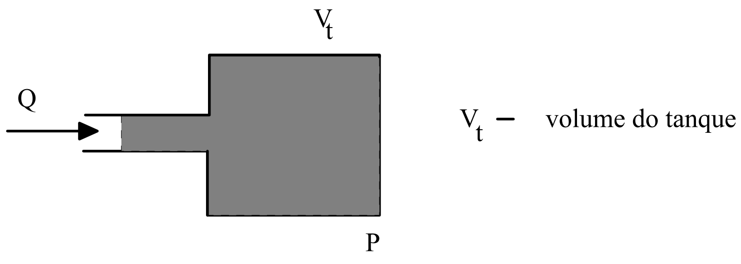
- Reservatório de fluido

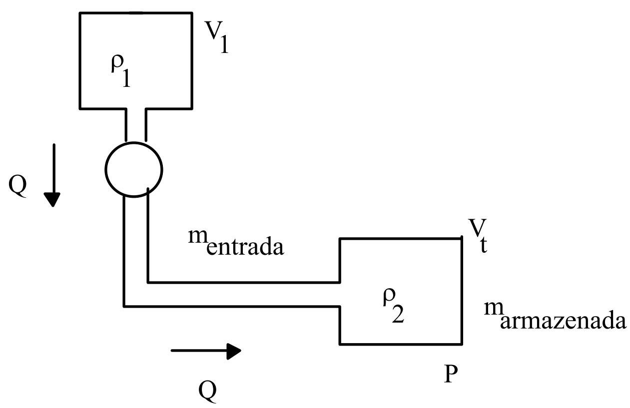


$$P = \rho.g.H \qquad (\rho \rightarrow \text{densidade do fluido})$$

$$V = AH = A\frac{P}{\rho.g} = \frac{A}{\rho.g}P \qquad \Rightarrow \qquad C_f = \frac{A}{\rho.g}$$

- Tanque Pressurizado





$$m_{entrada} = m_{armazenada}$$

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_t \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\rho_1 V_1) = \frac{d}{dt}(\rho_2 V_t) \quad \rightarrow \quad \rho_1 \frac{dV_1}{dt} = V_t \frac{d\rho_2}{dt}$$

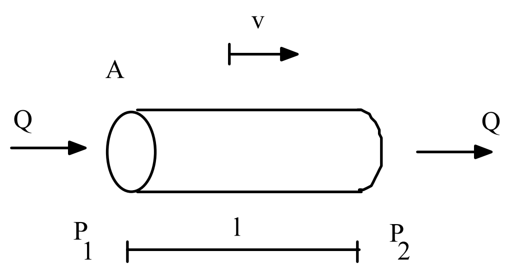
$$\rho_1 Q = \frac{d\rho_2}{dt} V_t$$

Para líquidos $\Rightarrow \quad d\rho_2 = \frac{\rho_1}{\beta} dP \qquad \beta \rightarrow$ módulo de elasticidade

Logo

$$Qdt = V_t dP \quad \Rightarrow \quad V = \frac{V_t}{\beta} P \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C_f} = \frac{V_t}{\beta}$$

Indutância Fluida <u>(Armazenador de Esforço)</u>



Considerando o fluido contido no tubo acima como uma massa fluida rígida se deslocando com velocidade v:

$$F = A(P_2 - P_1) = ma = \rho.lA\frac{dV}{dt}$$

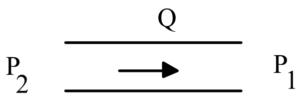
Definindo: $\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = P_{21}$ onde $\Gamma_{21} \rightarrow$ *momento* fluido

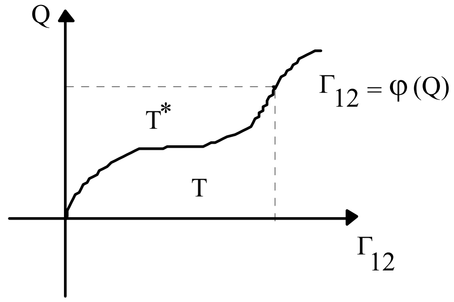
$$\Gamma_{21} = \int P_{21} dt \quad \Rightarrow \quad \text{armazenador de esforço}$$

Relação constitutiva:

$$Vol = Ax \quad \Rightarrow \quad \frac{dVol}{dt} = Q = A\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Q = Av} \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d\Gamma_{21}}{dt} = \frac{\rho.l}{A}\frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{21} = \frac{\rho.l}{A} Q \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L_f} = \frac{\rho.l}{A}$$





Energia cinética $\Rightarrow$ $T = \int_0^{\Gamma_{21}} Q d\Gamma_{21}$

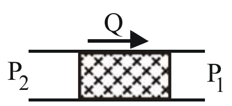
Co-energia cinética $\Rightarrow$ $T^* = \int_0^{Q} \Gamma_{21} dQ$

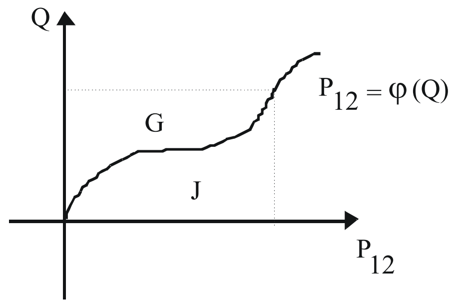
Para o caso linear: $T = T^* = \frac{1}{2} L_f Q^2$

Dissipação Fluida

Mecanismos de dissipação:

$$\left.\begin{array}{l}\text{- Forças viscosas entre o fluido e a superfície retentora.}\\ \text{- Forças viscosas entre as partículas fluidas.}\end{array}\right\} P = \varphi(Q)$$





Conteúdo $\Rightarrow$ $G = \int_0^{Q} P_{21} dQ$

Co-conteúdo $\Rightarrow$ $J = \int_0^{P} Q dP_{21}$

Para o caso linear:

$P_{12} = R_f Q \quad \Rightarrow \quad G = J = \frac{1}{2} R_f Q^2$

- Para um fluxo laminar através de um tubo capilar:

$$R_f = \frac{128\mu.l}{\pi.d^4}\begin{cases} R_f \rightarrow \text{Resistência fluida} \\ \mu \rightarrow \text{Viscosidade fluida} \\ l \rightarrow \text{Comprimento do tubo capilar} \\ d \rightarrow \text{Diâmetro do tubo capilar} \end{cases}$$

- Para um fluxo turbulento através de um cano longo:

$$P_{12} = aQ|Q|^{3/4}\begin{cases} \text{a} \rightarrow \text{Constante que depende das propriedades} \\ \qquad \text{do fluido e da geometria do tubo} \end{cases}$$

3.4 Sistemas Magnéticos

<u>- Força Magnetomotriz </u>(**M**) ⇒ Variável <u>ENTRE</u> ⇒ Variável de <u>ESFORÇO</u>

<u>- Fluxo Magnético </u>(**Φ**) ⇒ Variável <u>ATRAVÉS</u> ⇒ Variável de <u>FLUXO</u>

Armazenamento de energia em circuitos magnéticos ⇒ **Indutância**

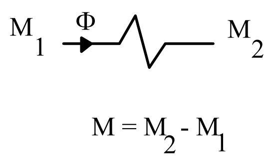
Propriedade de Indutância ⇒ Acúmulo de fluxo magnético

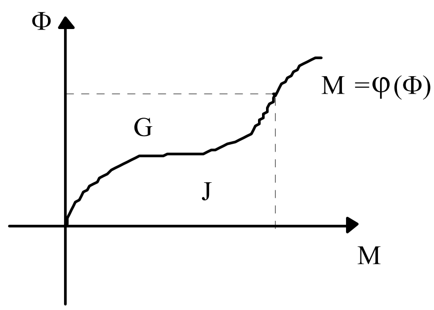
- *A forma complementar de armazenamento de energia magnética não é normalmente identificável.*

Relutância Magnética

$$\left.\begin{aligned} M &= \oint H dl \\ M &= \varphi(\Phi) \end{aligned}\right\}$$

$H \rightarrow$ campo magnético





No caso linear:

$$\begin{aligned} \Phi &= Ba \\ M &= Hl \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a \text{ - Área da seção transversal} \\ B \text{ - Densidade de fluxo} \end{cases}$$

$$\frac{\Phi}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{Ba}}{\mathrm{Hl}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{M}=\Phi\frac{\mathrm{Hl}}{\mathrm{Ba}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{M}=\Re\Phi$$

$$\Re=\frac{l}{\frac{B}{H}a}=\frac{l}{\mu a}\begin{cases}\Re \rightarrow \text{Relutancia magnetica}\\ \mu \rightarrow \text{Permeabilidade magnetica}\end{cases}$$

$$J=G=\frac{1}{2}\Re\Phi^2$$

Fontes de Energia Magnética

- Imã permanente
- Bobina com *N* espiras atravessada por uma corrente *I* $\Rightarrow$ $M = NI$

3.5 Sistemas Térmicos

<u>- Fluxo de calor (</u>$\boldsymbol{q}$) $\Rightarrow$ Variável <u>ENTRE</u> $\Rightarrow$ Variável de <u>ESFORÇO</u>

<u>- Diferença de temperatura (</u>ΔT) $\Rightarrow$ Variável <u>ATRAVÉS</u> $\Rightarrow$ Variável de <u>FLUXO</u>

$$H=mc_p(T_2-T_1)\begin{cases}\mathrm{H}\rightarrow \text{quantidade de calor}\\ \mathrm{m}\rightarrow \text{massa da substancia}\\ \mathrm{c_p}\rightarrow \text{calor especifico}\end{cases}$$

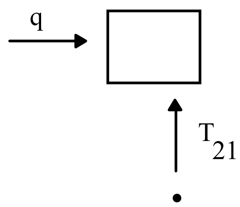
O calor H é uma variável energia

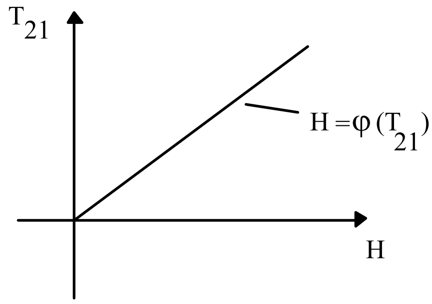
$\Downarrow$

Generalização não pode ser feita em termos de energia

Capacitância Térmica <u>(Armazenador de Fluxo)</u>

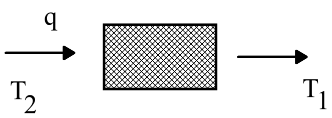
$$q=\frac{dH}{dt} \quad \Rightarrow \quad H=\int q\,dt \qquad \text{(qualquer corpo)}$$



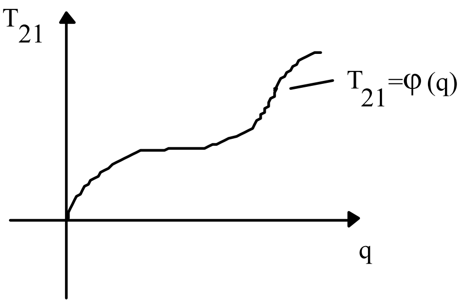


$U = H = \int q\,dt$

Dissipação Térmica



$T_{21} = T_2 - T_1$



Para o caso linear:

$T_{21} = R_t q$ $\qquad$ $R_t \rightarrow$ resistencia termica

- Fluxo de calor por condução:

$$q = \frac{\sigma_c A}{l} T_{21} \quad \begin{cases} \sigma_c \rightarrow \text{Condutividade termica do corpo} \\ A \rightarrow \text{Área da secao transversal do corpo} \\ l \rightarrow \text{Comprimento do corpo} \end{cases}$$

- Fluxo de calor por convecção:

$q = C_h A T_{21}$ $\qquad$ $C_h \rightarrow$ coeficiente de calor

4 ELEMENTOS ESPECIAIS MULTI-PORTAS DE SISTEMAS

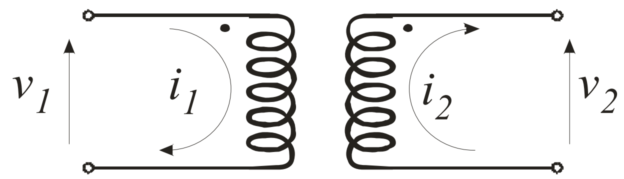
- Conversores de energia

- Acopladores de energia $\begin{cases} \text{- conservadores de potencia} \\ \text{- armazenadores de energia} \end{cases}$

- Multi-Portas Moduladas

4.1 Conversores de Energia

4.1.1 Transformador Elétrico



$\lambda_1 = \varphi_1(i_1, i_2)$ $\qquad$ $\lambda_2 = \varphi_2(i_1, i_2)$

Caso linear:

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11}i_1 + M_{12}i_2 \\ \lambda_2 = M_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{cases} ; \quad \text{onde:} \quad \begin{cases} \text{L} \rightarrow \text{Indutância própria} \\ \text{M} \rightarrow \text{Indutância mútua} \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} \qquad\qquad v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt}$$

Para Bi-porta Conservativa: $\quad M_{12} = M_{21} = M$

$$i_2 = \frac{\lambda_1}{M} - \frac{L_{11}}{M}i_1$$

$$\lambda_2 = Mi_1 + L_{22}\left(\frac{\lambda_1}{M} - \frac{L_{11}i_1}{M}\right) = \left(\frac{M^2 - L_{11}L_{22}}{M}\right)i_1 + \frac{L_{22}}{M}\lambda_1$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{L_{22}}{M} & \dfrac{M^2-L_{11}L_{22}}{M}\\ \dfrac{1}{M} & -\dfrac{L_{11}}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ i_1\end{bmatrix}$$

Coeficiente de Acoplamento $\Rightarrow$ $\boxed{k=\dfrac{M}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}}$

Se k= 1 (acoplamento perfeito),

$$\begin{bmatrix}\lambda_2\\ i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\dfrac{L_{22}}{L_{11}}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} & -\sqrt{\dfrac{L_{11}}{L_{22}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ i_1\end{bmatrix}$$

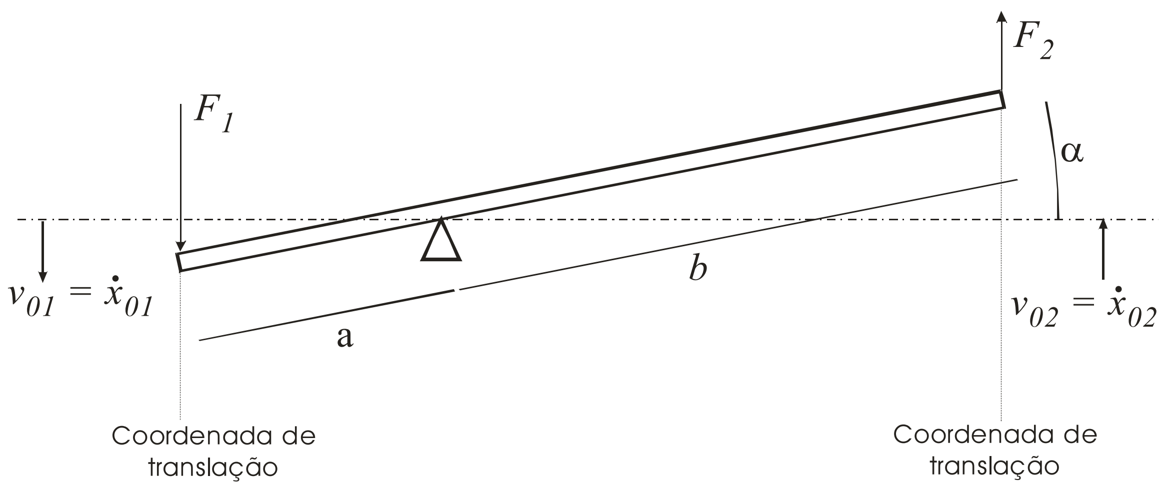
Se a permeabilidade magnética for grande $\rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}\cong 0$

$$\boxed{\mathrm{v}_1=\mathrm{nv}_2} \qquad \boxed{\mathrm{ni}_1=-\mathrm{i}_2}$$

onde $\mathrm{n}=\sqrt{\dfrac{\mathrm{L}_{11}}{\mathrm{L}_{22}}}$

Se $L_{11}=\dfrac{N_1^2}{\Re}$ e $L_{22}=\dfrac{N_2^2}{\Re}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{n}=\dfrac{\mathrm{N}_1}{\mathrm{N}_2}}$

4.1.2 Transformador Mecânico-Translacional



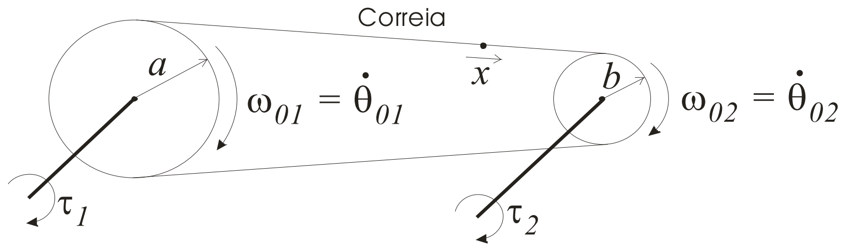
Considerando a alavanca rígida e sem massa e o apoio livre de atrito, podemos ter:

$$\begin{cases} x_{01} = a sen\alpha \\ x_{02} = -b sen\alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{01}}{v_{02}} = -\frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{v_{01} = -\left(\frac{a}{b}\right)v_{02}}$$

e, pelo princípio da alavanca:

$$\boxed{F_2 = \left(\frac{a}{b}\right)F_1}; \qquad n = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Módulo de transformação}$$

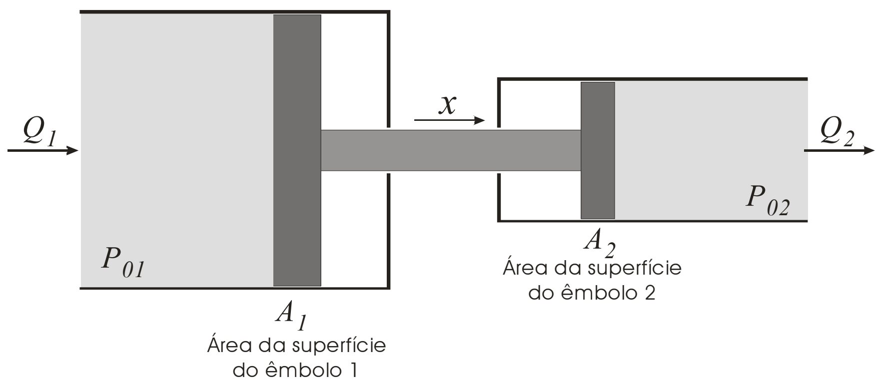
4.1.3 Transformador Mecânico-Rotacional



$$\begin{cases} x = a\theta_{01} \\ x = b\theta_{02} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_{01} = \frac{b}{a}\omega_{02}}$$

$$\tau_1\theta_{01} = \tau_2\theta_{02} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\tau_2 = \left(\frac{a}{b}\right)\tau_1}; \quad n = \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Módulo de transformação}$$

4.1.4 Transformador Fluido



$$x = \frac{V_1}{A_1} = \frac{V_2}{A_2} \xrightarrow{Q=\frac{dV}{dt}} \boxed{Q_2 = \frac{A_2}{A_1} Q_1}$$

$$F_{01} = F_{02} = P_{01} A_1 = P_{02} A_2 \Rightarrow \boxed{P_{01} = \frac{A_2}{A_1} P_{02}} \; ; \; n = \frac{A_2}{A_1} \quad \Rightarrow \quad \text{Módulo de transformação}$$

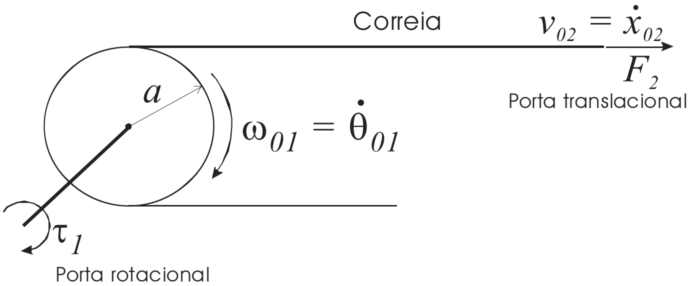
4.2 Acopladores de Energia

- Transformam um tipo de energia em outro
- Modelam transdutores, atuadores, motores e geradores

$$\begin{cases} \text{- Acopladores conservadores de potencia} \\ \text{- Acopladores armazenadores de energia} \end{cases}$$

4.2.1 Acopladores Conservadores de Potência

- **Transformador Rotacional/Translacional**

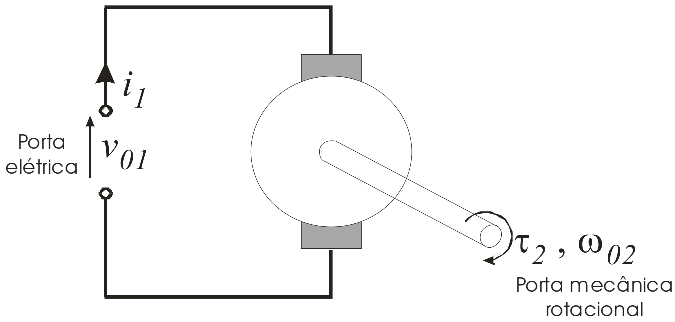


$$\theta_{01} = \frac{1}{a} x_{02} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{01} = \frac{1}{a} v_{02}}$$

$$\tau_1 = F_2 a \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_2 = \frac{1}{a} \tau_1} \; ; \quad n = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \text{Módulo de transformação}$$

- **Transformador Eletromecânico**

Motor / Gerador



$$\left.\begin{aligned} v_{01} &= K_1 \Phi \omega_{02} \\ \tau_2 &= K_2 \Phi i_1 \end{aligned}\right\} \qquad \text{Conservação de Potência} \quad \Rightarrow \quad K_1 = K_2 = K$$

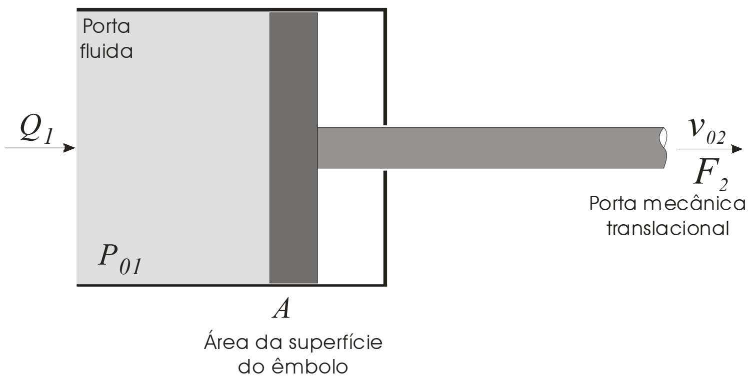
Logo,

$$\left.\begin{aligned} v_{01} &= K \Phi \omega_{02} \\ \tau_2 &= K \Phi i_1 \end{aligned}\right\} \qquad \Phi \quad \rightarrow \quad \text{fluxo total}$$

$\boxed{v = n\omega}$

$\boxed{\tau = ni}$; n = KΦ ⇒ Módulo de transformação

- **Girador Fluido-Mecânico**

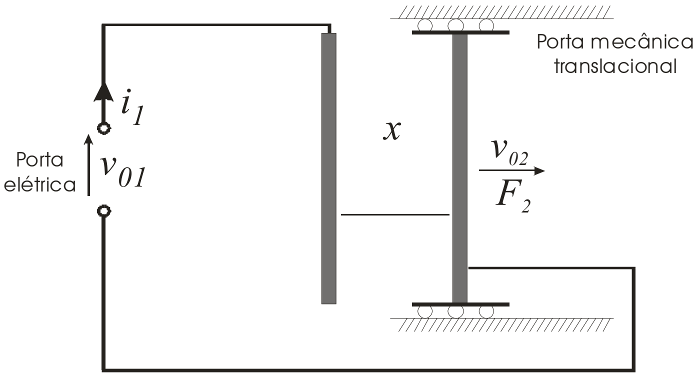


$$\boxed{v_{02} = \frac{1}{A} Q_1}$$

$$\boxed{P_{01} = \frac{1}{A} F_2} \; ; \qquad r = \frac{1}{A} \quad \Rightarrow \quad \text{Módulo de giração}$$

4.2.2 Acopladores Conservadores de Energia

- **Eletromecânico (**campo elétrico**)**



$$\boxed{F_2 = \varphi_2(x,q)} \qquad \boxed{v_{01} = \varphi_1(x,q)}$$

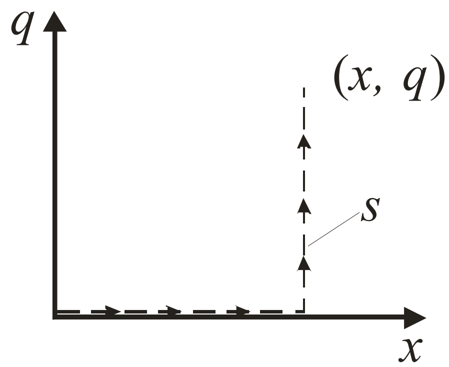
Se o dispositivo for eletricamente linear, tem-se:

$$C(x) = \frac{q}{v_{01}} \quad \Rightarrow \quad v_{01} = \frac{q}{C(x)}$$

Energia Armazenada no campo elétrico:

$$U(x,q) = \int_S v_{01}dq + \int_S F_2 dx \qquad \text{(Energia Elétrica + Energia Mecânica)}$$

$S \Rightarrow$ Caminho arbitrário de integração de um ponto para (x,q)



A energia armazenada pode ser calculada integrando-se ao longo de qualquer caminho *S*. Um caminho conveniente é o indicado na figura, pois a força F_2 é zero para todo x quando a carga é zero.

Neste caso, se o estado inicial (x_0, q_0) é (0,0),

$$U(x,q) = \int_0^q \frac{q}{C(x)}\,dq = \frac{q^2}{2C(x)}$$

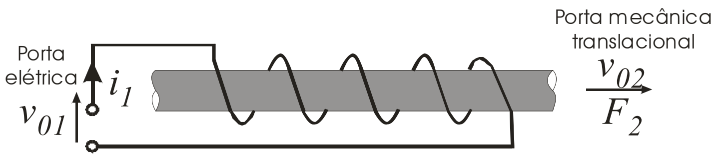
Uma vez obtida uma expressão para energia acumulada, as relações constitutivas que descrevem a força e a tensão, são dadas por:

$$\boxed{F_2 = \frac{\partial U(x,q)}{\partial x}} \qquad \boxed{v_{01} = \frac{\partial U(x,q)}{\partial q}}$$

Logo,

$$\boxed{F_2 = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C(x)}\right)} \qquad \boxed{v_{01} = \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{q}{C(x)}}$$

- **Eletromecânico (**campo magnético**)**



$$\boxed{F_1 = \varphi_2(x,\lambda)} \qquad \boxed{i_1 = \varphi_1(x,\lambda)}$$

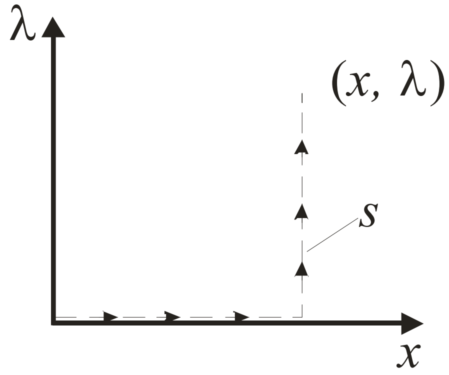
Se o dispositivo for eletricamente linear, tem-se:

$$\lambda = L(x)i_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{\lambda}{L(x)}$$

Energia Armazenada no campo magnético:

$$T(x,\lambda) = \int_S i_1\,d\lambda + \int_S F_2\,dx \qquad \text{(Energia Elétrica + Energia Mecânica)}$$

$S \Rightarrow$ Caminho arbitrário de integração de um ponto para (x,λ)



A energia armazenada pode ser calculada integrando-se ao longo de qualquer caminho *S*. Um caminho conveniente é o indicado abaixo, pois a força F é zero para todo x quando o fluxo é zero.

Neste caso, se o estado inicial é (0,0),

$$T(x,\lambda) = \int_0^\lambda \frac{\lambda}{L(x)} d\lambda = \frac{\lambda^2}{2L(x)}$$

Uma vez obtida uma expressão para energia acumulada, as relações constitutivas que descrevem a força e a corrente, são dadas por:

$$\boxed{F_2 = \frac{\partial T(x,\lambda)}{\partial x}} \qquad \boxed{i_1 = \frac{\partial T(x,\lambda)}{\partial \lambda}}$$

Logo,

$$\boxed{F_2 = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\lambda^2}{2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L(x)}\right)} \qquad \boxed{i_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{L(x)}}$$

4.3 MULTI-PORTAS MODULADAS

- Modulação de relações constitutivas por uma variável auxiliar.
- Ocorre frequentemente em portas conservativas e em portas simples.

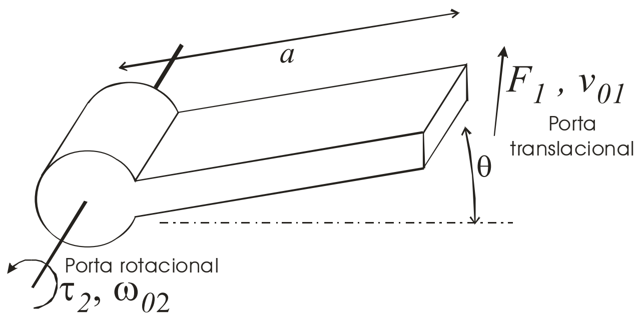
4.3.1 Bi-Portas Moduladas

Uma bi-porta modulada expressa a variável de estado como uma função das variáveis esforço e fluxo e de alguma variável auxiliar ρ.

Para um transformador ideal $\Rightarrow$ $e_1 = n(\rho)e_2$, $f_2 = n(\rho)f_1$

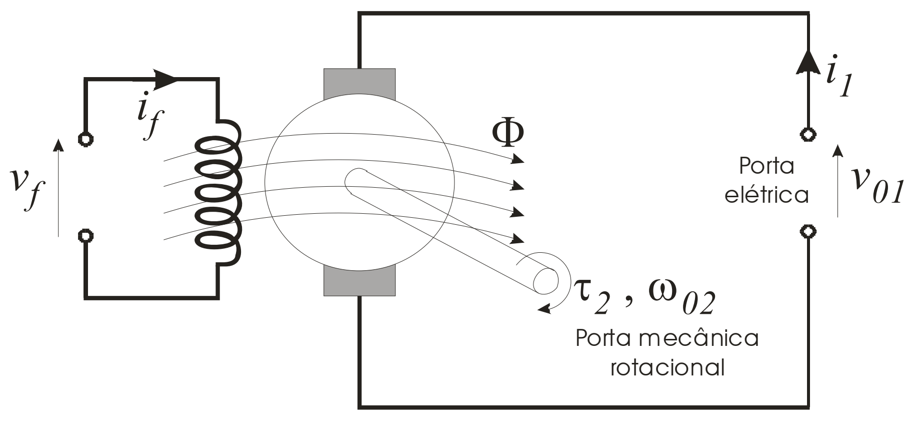
Para um girador ideal $\Rightarrow$ $e_1 = r(\rho)f_2$, $e_2 = r(\rho)f_1$

- **Transformador Rotacional-Translacional Modulado**



$$\left.\begin{aligned} \tau_2 &= (a\cos\theta)F_1 \\ v_{01} &= (a\cos\theta)\omega_{02} \end{aligned}\right\};$$ $$\boxed{n(\theta) = a\cos\theta}$$

- **Variável Campo em Motor/Gerador**



$$v_{01} = K_1 \Phi \omega_{02}$$

$$\tau_2 = K_1 \Phi i_1$$

Contudo, o fluxo é função da corrente de campo i_f:

$$K_1 \Phi = n(i_f)$$

Logo,

$$\boxed{v = n(i_f)\omega}$$

$$\boxed{\tau = n(i_f)i}$$

4.3.2 Uni-Portas Moduladas

Elementos da interface do sistema com o controlador são freqüentemente modulados para permitir o controle da dinâmica interna do sistema.

Ex: Amplificador de potência

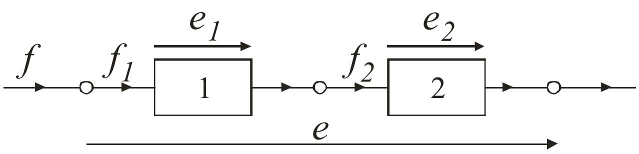
5 INTERCONEXÃO DE ELEMENTOS DE SISTEMAS

Conexão de elementos de sistemas ⇒ Novo conjunto de restrições

Relações Interconectivas ⇒ Independem do material ou da dinâmica envolvida

Existem duas maneiras diferentes de conectar elementos uni-portas:

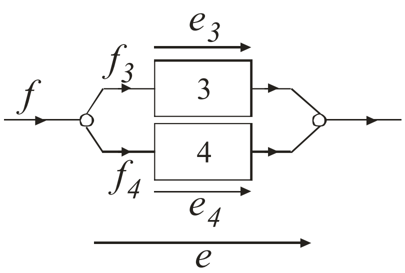
- **Conexão Série**



$$e = e_1 + e_2$$

$$f = f_1 + f_2$$

- **Conexão Paralelo**

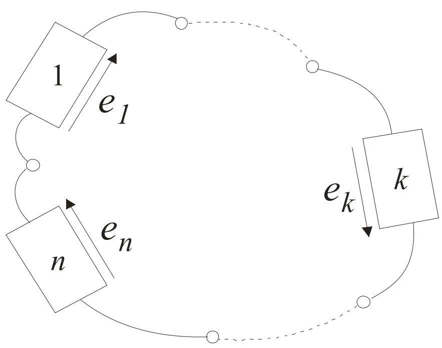


$$e = e_3 = e_4$$

$$f = f_3 + f_4$$

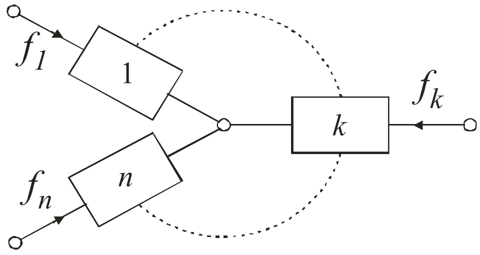
Estas relações podem ser colocadas como restrições de **compatibilidade** de esforço e de **continuidade** de fluxo.

- **Restrição de Compatibilidade de Esforço**

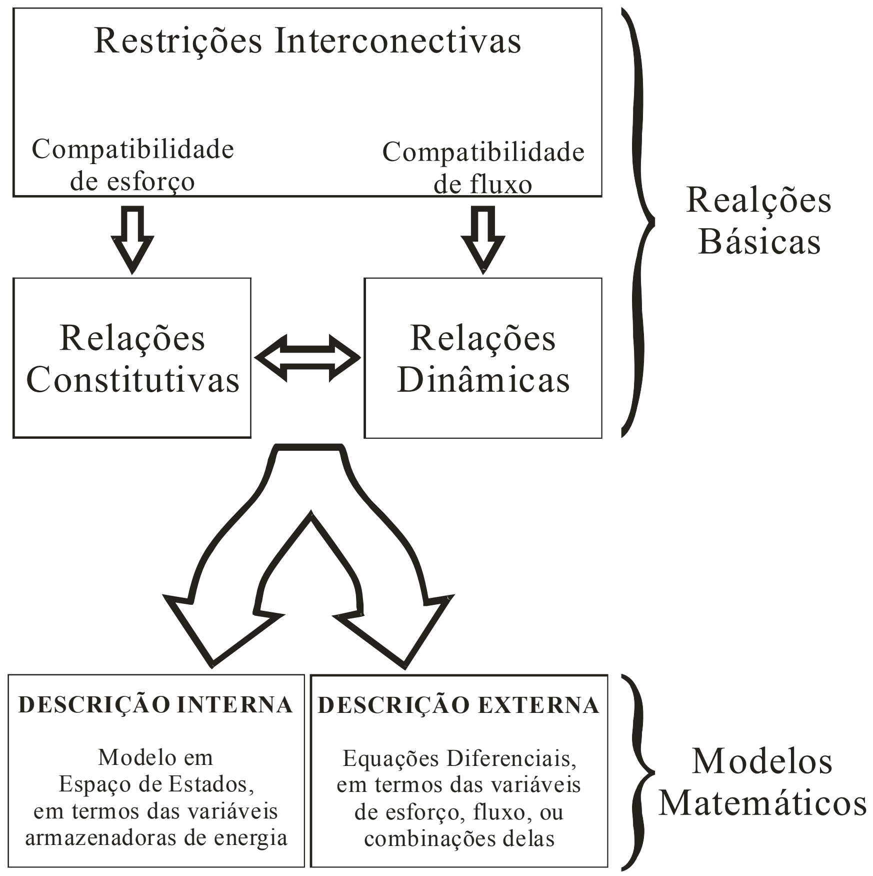


$$\sum_{k=1}^{n} e_k = 0$$

- **Restrição de Continuidade de Fluxo**

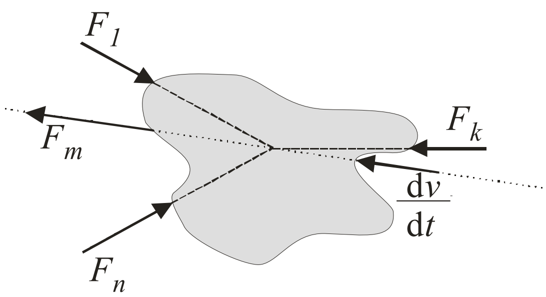


$$\sum_{k=1}^{n} f_k = 0$$



5.1 Sistemas Mecânicos

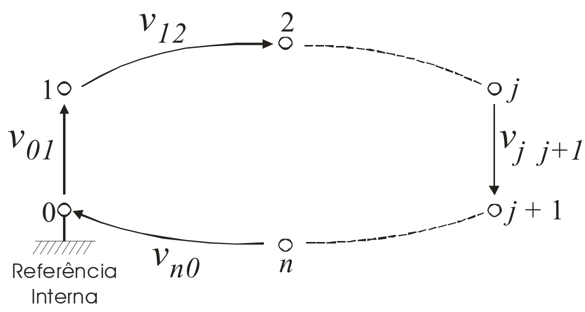
- **Restrição de continuidade de força**



$$\sum_{i=1}^{n} F_i + F_m = 0$$

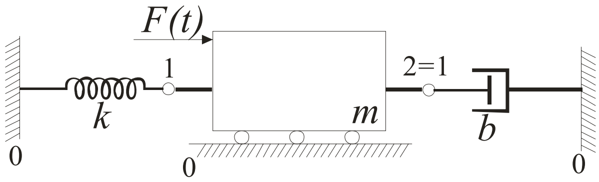
$$\text{onde: } F_m = \frac{dp}{dt}$$

- **Restrição de compatibilidade de velocidade**



$$\sum_{j=0}^{n-1} v_{j,j+1} = v_{0n}$$

- **Aplicação das regras interconectivas**



- Lei de continuidade para forças: $F(t) - F_k - F_m - F_b = 0$

- Relações constitutivas:
$$\begin{cases} F_k = kx_{10} \\ p = mv_{10} \\ F_b = bv_{20} = bv_{10} \end{cases}$$

- Relações dinâmicas:
$$\begin{cases} F_m = \dfrac{dp}{dt} \\ v_{10} = \dfrac{dx_{10}}{dt} \end{cases}$$

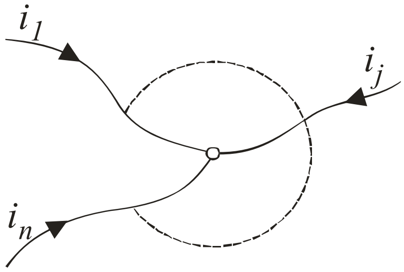
- Variáveis de estado naturais $\Rightarrow$ p, x_{10}

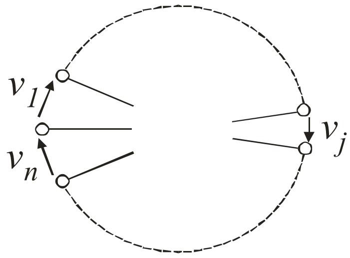
- Descrição Interna:
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -kx_{10} - \dfrac{b}{m} p + F(t) \\ \dfrac{dx_{10}}{dt} = \dfrac{1}{m} p \end{cases}}$$

- Descrição Externa:
$$\boxed{\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}_{10}}{\mathrm{dt}^2} + \mathrm{b}\frac{\mathrm{dx}_{10}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{kx}_{10} = \mathrm{F(t)}}$$

5.2 Sistemas Elétricos

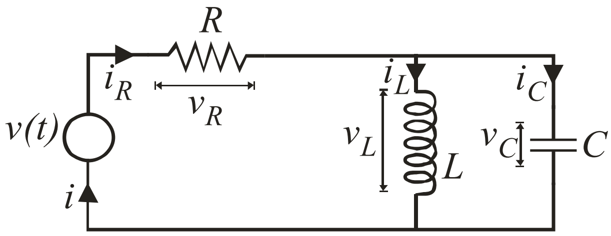
- **Restrições interconectivas para tensão e corrente**





$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} v_j = 0$$

- **Aplicação das regras interconectivas**



- Leis interconectivas:

$$\begin{cases} v(t) = v_R + v_C \\ v_L = v_C \\ i_R = i_L + i_C \\ i = i_R \end{cases}$$

- Relações constitutivas e dinâmicas:

$$\begin{cases} v_R = Ri_R \\ \lambda_L = Li_L \\ q_C = Cv_C \\ i_C = \dfrac{dq_C}{dt} \\ v_L = \dfrac{d\lambda_L}{dt} \end{cases}$$

- Variáveis de estado naturais $\Rightarrow$ q_C , λ_L

- Descrição Interna:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_C}{dt} = -\dfrac{1}{RC} q_C - \dfrac{1}{L} \lambda_L + \dfrac{1}{R} v(t) \\ \dfrac{d\lambda_L}{dt} = \dfrac{1}{C} q_C \end{cases}$$

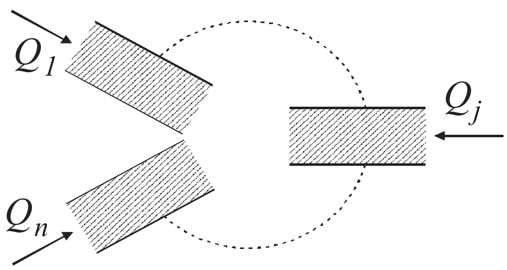
- Descrição Externa:

$$\boxed{\frac{d^2 \lambda_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\lambda_L}{dt} + \frac{1}{LC} \lambda_L = \frac{1}{RC} v(t)}$$

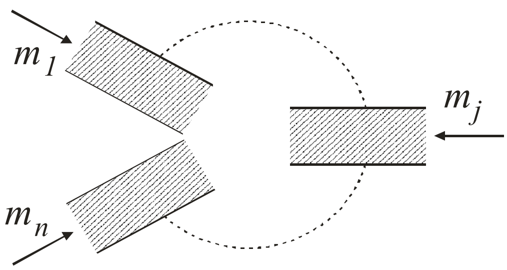
5.3 Sistemas Fluidos

- **Leis Interconectivas para pressão e razão de fluxo**

Fluido Incompressível



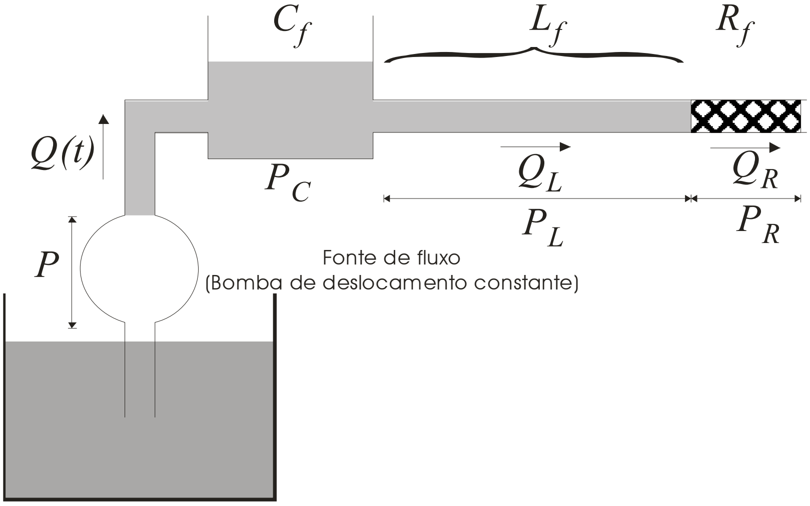
Fluido Compressível



$$\sum_{j=1}^{n} Q_j = 0$$ $Q_j \Rightarrow$ Vazão

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = 0$$ $m_j \Rightarrow$ Fluxo de massa

- **Aplicação das regras interconectivas**



- Leis interconectivas: $\begin{cases} P = P_C \\ Q(t) = Q_C + Q_L \\ P_C = P_L + P_R \\ Q_L = Q_R \end{cases}$

- Relações constitutivas: $\begin{cases} V_C = C_f P_C \\ \Gamma_L = L_f Q_L \\ P_R = R_f Q_R \end{cases}$

- Relações Dinâmicas: $\begin{cases} Q_C = \dfrac{dV_C}{dt} \\ P_L = \dfrac{d\Gamma_L}{dt} \end{cases}$

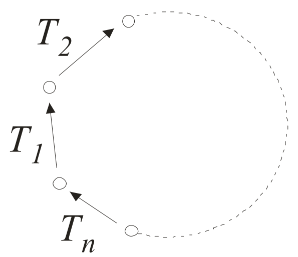
- Variáveis de estado naturais $\Rightarrow$ Γ_L , V_C

- Descrição interna: $\boxed{\begin{cases} \dfrac{dV_C}{dt} = -\dfrac{1}{L_f}\Gamma_L + Q(t) \\ \dfrac{d\Gamma_L}{dt} = \dfrac{1}{C_f}V_C - \dfrac{R_f}{L_f}\Gamma_L \end{cases}}$

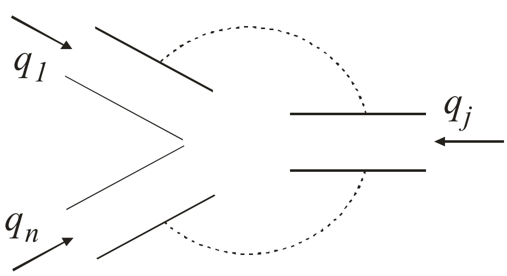
- Descrição Externa: $\boxed{\dfrac{d^2V_C}{dt^2} + \dfrac{R_f}{L_f}\dfrac{dV_C}{dt} + \dfrac{1}{L_f C_f}V_C = \dfrac{R_f}{L_f}Q(t) + \dfrac{dQ(t)}{dt}}$

5.4 Sistemas Térmicos

- **Leis interconectivas de fluxo de calor e temperatura**

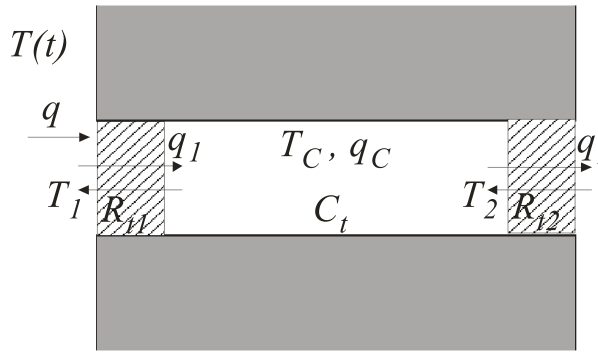


$$\sum_{i=1}^{n} T_i = 0$$



$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 0$$

- **Aplicação das regras interconectivas**



- Leis interconectivas:

$$\begin{cases} T(t) = T_1 + T_2 \\ T_C = T_2 \\ q_1 = q_C + q_2 \\ q = q_1 \end{cases}$$

- Relações constitutivas:

$$\begin{cases} H_C = C_t T_C \\ T_1 = R_{t1} q_1 \\ T_2 = R_{t2} q_2 \end{cases}$$

- Relações Dinâmicas:

$$\begin{cases} \dfrac{dH_C}{dt} = q_C \end{cases}$$

- Variáveis de estado naturais $\Rightarrow$ H_C

- Descrição do sistema:

$$\boxed{\frac{dH_C}{dt} = -\left(\frac{1}{R_{t1}} + \frac{1}{R_{t2}}\right)\frac{H_C}{C_t} + \frac{1}{R_1} T(t)}$$