ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Número da Experiência*: 7

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Seguidor de Referência

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Aprimoramento dos conceitos envolvidos na teoria de espaço de estados;
- Introdução ao projeto de controladores no tempo em domínio discreto;
- Projeto de um seguidor de referência para o acompanhamento de degraus.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Um microcomputador PC com um compilador C++;
- Uma placa de aquisição de dados MultQ3 da Quanser;
- Um módulo de potência UP-15-03;
- Um sistema de tanques acoplados da Quanser;

5. *Introdução*:

5.1. Sistema Discreto no Tempo

Considere um sistema discreto linear e invariante no tempo descrito em variáveis de estado:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}u(k)\end{aligned}} \tag{1}$$

A representação no domínio discreto (eq.(2)) pode ser obtida a partir da representação contínua (eq.(1)) fazendo-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(T) &= \mathrm{e}^{\mathbf{A}T}\\ \mathbf{H}(T) &= \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}dt = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}dt\right)\mathbf{B}\end{aligned} \tag{2}$$

5.1.1. Estabilidade

Considerando:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathrm{k}+1) &= \mathrm{a}\mathbf{x}(\mathrm{k})\\ \mathbf{x}(\mathrm{k}) &= \mathrm{a}^{\mathrm{k}}\mathbf{x}(0)\end{aligned}$$

Um sistema discreto é estável se todos os autovalores de **G** estão dentro de círculo unitário.

5.1.2. *Controlabilidade*

O sistema (**G**,**H**,**C**,**D**) é controlável se o posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{W_C}$ for igual a *n*.

$$\mathbf{W_C} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix}$$

5.1.3. *Observabilidade*

O sistema (**G**,**H**,**C**,**D**) é observável se o posto da matriz de observabilidade $\mathbf{W_O}$ for igual a *n*.

$$\mathbf{W_O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CG} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{n-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

5.2. Seguidor de Referência para Entrada Degrau

Dado o sistema: $\begin{cases} \mathbf{x}(\mathrm{k}+1) = \mathbf{Gx}(\mathrm{k}) + \mathbf{H}\mathrm{u}(\mathrm{k}) \\ \mathrm{y}(\mathrm{k}) = \mathbf{C}\mathrm{x}(\mathrm{k}) \end{cases}$

e um sinal do tipo: $v(k) = v(k-1) + \underbrace{r(k) - y(k)}_{e(k)}$

Seja: $\mathrm{u}(\mathrm{k}) = -\mathrm{k}_2\mathbf{x}(\mathrm{k}) + \mathrm{k}_1\mathrm{v}(\mathrm{k})$

tem-se:

$$u(k+1) = -k_2 x(k+1) + k_1 v(k+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u(k+1) = (k_2 - k_2\mathbf{G} - k_1\mathbf{CG})x(k) + (1 - k_2\mathbf{H} - k_1\mathbf{CH})u(k) + k_1 r(k+1)$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ k_2 - k_2\mathbf{G} - k_1\mathbf{CG} & 1 - k_2\mathbf{H} - k_1\mathbf{CH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 \end{bmatrix} r(k+1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

Se os autovalores da matriz acima forem “estáveis”:

$v(k) = v(k+1)$ quando $k \to \infty$ e

$v(\infty) = v(\infty) + r - y(\infty)$

Considerando *r* degrau e definindo:

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty)$$

$$u_e(k) = u(k) - u(\infty)$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ u_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ k_2 - k_2\mathbf{G} - k_1\mathbf{CG} & 1 - k_2\mathbf{H} - k_1\mathbf{CH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix}$$

Definindo:

$$w(k) = \begin{bmatrix} k_2 - k_2\mathbf{G} - k_1\mathbf{CG} & 1 - k_2\mathbf{H} - k_1\mathbf{CH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix}$$

tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_e(\mathrm{k}+1) \\ \mathrm{u}_e(\mathrm{k}+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}_e(\mathrm{k}) \\ \mathrm{u}_e(\mathrm{k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{w}(\mathrm{k})$$

$$\Rightarrow x(k+1) = \hat{\mathbf{G}}x(k) + \hat{\mathbf{H}}w(k)$$

Usando realimentação de estado: $\mathrm{w}(\mathrm{k}) = -\hat{\mathbf{K}}?(\mathrm{k})$

Usando Ackermmann: $\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W}_c^{-1} \mathbf{q}_c(\hat{\mathbf{G}})$

logo:

$$\begin{bmatrix} k_2 & k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & + & \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} - \mathbf{I} & \mathbf{H} \\ \mathbf{CG} & \mathbf{CH} \end{bmatrix}^{-1}$$

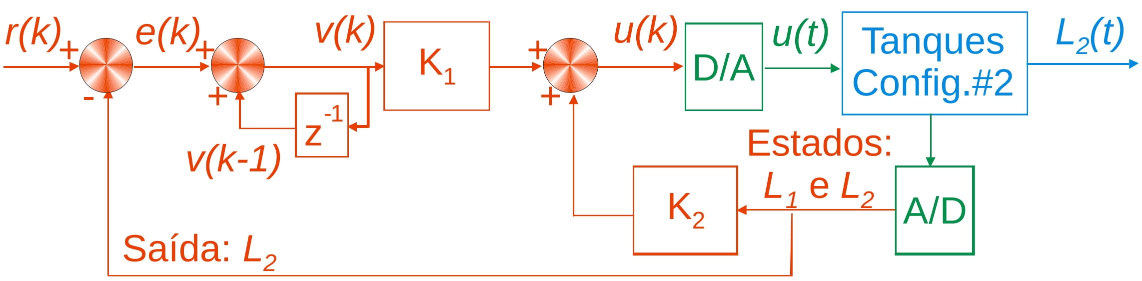

Figura 1 – Esquema de controle de um seguidor de degrau para a configuração #2 do sistema de tanques.

6. *Desenvolvimento*:

1º. Altere seu programa para que, o usuário possa também optar por controlar o sistema, na configuração 2, utilizando um seguidor de referência para entradas do tipo degrau. Caso seja essa a escolha do usuário, o programa deve:

a) Receber como referência um valor de nível em centímetros;

b) Oferecer as opções para que o usuário informe os ganhos ou os pólos do seguidor;

- Caso o usuário opte por fornecer os pólos desejados para o seguidor, o programa deverá, a partir dos pólos dados, calcular e mostrar na tela os ganhos;

Obs.: Pode ser necessário limitar a entrada da planta entre **0 e 3 volts** antes de enviá-lo para a bomba através da placa D/A.

2º. Projete um seguidor de referência no domínio discreto (calcule os ganhos), para acompanhar entradas do tipo degrau, com pólos em: p_1 = 0,9048; p_2 = 0,9920 e p_3 = 0,9980. Descreva em seu relatório as etapas do projeto.

3º. Forneça os mesmos pólos ao programa e compare os valores obtidos no item anterior com aqueles calculados pelo programa.

4º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do sistema para diferentes configurações de pólos: