Universidade Federal do Rio Grande do Norte – Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
Laboratório de Controle
Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo (http://www.dca.ufrn.br/~meneghet)

ROTEIRO DE LABORATÓRIO

1. *Número da Experiência*: 6

2. *Título*: Controle no Espaço de Estados: Observadores de Estado

3. *Objetivos*: Esta prática tem como objetivos:

- Introdução do conceito de espaço de estados;
- Conceituação de observadores de estado;
- Análise da utilidade de modelos matemáticos para estimação de estados;
- Projeto e implementação de um observador de estados.

4. *Equipamento Utilizado*: São necessários para realização desta experiência:

- Um microcomputador PC com um compilador C;
- Uma placa de aquisição de dados MultQ3 da Quanser;
- Um módulo de potência UP-15-03;
- Um sistema de tanques acoplados da Quanser;

5. *Introdução*:

5.1. *Descrição Por Variáveis de Estado*

É aplicável a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas, que podem ser lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo e com condições iniciais não-nulas.

O estado de um sistema no instante t_0 é a quantidade de informação em t_0 que, junto com a entrada $u(t)$ em $t \geq t_0$, determina univocamente o comportamento do sistema para todo $t \geq t_0$.

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)} \quad \text{Equação de Estado (dinâmica do sistema)}$$
$$\boxed{y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t)} \quad \text{Equação de Saída (observação do sistema)} \qquad (1)$$

$\mathbf{x}(t)$ → Vetor de estado;

$x_i(t)$ → Variável de estado;

$u(t)$ → Vetor de entrada;

$y(t)$ → Vetor de saída;

5.1.1. Estabilidade

- **Teorema**: Um sistema é estável se quando $u(t) = 0$, para todo $x(0)$, temos que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \mathbf{0}$

- **Corolário:** Um sistema é estável se todos os autovalores da matriz **A** apresentam parte real negativa.

5.1.2. Controlabilidade

- **Definição:** O sistema (A,B,C,D) é controlável se, quaisquer que sejam $x(0)$ e $x(T)$, existe $u(t)$ $0 \le t \le T$ que transfere o estado $x(0)$ para o estado $x(T)$ em um tempo finito.

- **Teorema:** O sistema (A,B,C,D) é controlável se, e somente se, o posto da matriz de controlabilidade $\mathbf{U} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$ é igual a n.

5.1.3. Observabilidade

- **Definição:** O sistema (A,B,C,D) é observável se para todo $x(0)$, o conhecimento da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$ em um tempo finito é suficiente para determinar $x(t)$.

- **Teorema:** O sistema (A,B,C,D) é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{CA} & \mathbf{CA^2} & \dots & \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}^T$ é igual a n.

5.2. Sistema Discreto no Tempo

Considere um sistema discreto linear e invariante no tempo descrito em variáveis de estado:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{Gx}(k) + \mathbf{H}u(k)\\ y(k) &= \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{D}u(k)\end{aligned}} \tag{2}$$

A representação no domínio discreto (eq.(2)) pode ser obtida a partir da representação contínua (eq.(1)) fazendo-se:

$$\mathbf{G}(T) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}T}$$

$$\mathbf{H}(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}dt = \left(\int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}dt\right)\mathbf{B} \tag{3}$$

5.3. Observadores de Estados

A dinâmica do observador de estados é dada por: $\begin{cases}\hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k}+1) = \mathbf{G}\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{k}) + \mathbf{L}\big(\mathrm{y}(\mathrm{k}) - \hat{\mathrm{y}}(\mathrm{k})\big) + \mathbf{H}\mathrm{u}(\mathrm{k})\\ \hat{\mathrm{y}}(\mathrm{k}) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k})\end{cases}$

A dinâmica do erro e estimação dos estados é descrita então por:

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{x}}(\mathrm{k}+1) = \mathbf{x}(\mathrm{k}+1) - \hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k}+1) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k}+1) = \mathbf{Gx}(\mathrm{k}) + \mathbf{H}\mathrm{u}(\mathrm{k}) - \big[\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k}) + \mathbf{L}\big(\mathrm{y}(\mathrm{k}) - \hat{\mathrm{y}}(\mathrm{k})\big) + \mathbf{H}\mathrm{u}(\mathrm{k})\big]\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathrm{k}+1) = (\mathbf{G} - \mathbf{LC})\tilde{\mathbf{x}}$$

O projeto de observadores de estado consiste em determinar **L** para que **G - LC** tenha pólos desejados.

Utilizando-se a formula de Ackermann, tem-se.

$$\mathbf{L} = q_C(\mathbf{G})\mathbf{W_O}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

6. *Desenvolvimento*:

Conhecendo-se as EDOs que descrevem as dinâmicas dos tanques 1 e 2 (configuração #2):

$$\boxed{\dot{L}_1 = -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1 + \frac{K_m}{A_1}V_P} \quad \text{e} \quad \boxed{\dot{L}_2 = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{20}}}L_2 + \frac{a_1}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2L_{10}}}L_1},$$

onde:

- $A_1 = A_2 = 15{,}5179$;
- $L_{20} = 15$; $L_{10} = \frac{a_2^2}{a_1^2} L_{20}$;
- $a_1 = 0{,}17813919765$; $a_2 = a_1$; (Orifício médio)
- $K_m = 4{,}6$.

Pede-se:

1º. Encontre uma representação em espaço de estados onde L_1 e L_2 sejam estados do modelo;

2º. Discretize a equação de estado utilizando o mesmo período de amostragem utilizado nas experiências anteriores.

3º. Projete um observador de estados com base no modelo obtido (A escolha dos pólos do observador faz parte do projeto, e deve ficar clara no relatório).

4º. Acrescente ao seu programa uma opção para realizar a observação de estados.

Quando a opção de realizar a observação dos estados for selecionada, o programa deve:

a) Utilizar o sistema de 2 ordem em malha fechada;
b) Fazer a leitura dos sensores de nível dos tanques 1 e 2, através da placa A/D;
c) Utilizar a entrada e a saída do sistema para estimar os estados em cada instante;
d) Apresentar de forma clara uma comparação entre os estados estimados e os estados medidos.

5º. Examine e descreva em seu relatório o comportamento do observador para diferentes conjuntos de pólos:

6º. Comente, em seu relatório, sobre a possibilidade de se utilizar os estados estimados para fazer realimentação de estados: