

UM MÉTODO DE GERAÇÃO DE TRAJETÓRIA PARA ROBÔS NÃO-HOLONÔMICOS COM ACIONAMENTO DIFERENCIAL

Diogo Pinheiro. F. Pedrosa*
diogo@dca.ufrn.br

Adelardo Adelino D. Medeiros*
adelardo@dca.ufrn.br

Pablo J. Alsina*
pablo@dca.ufrn.br

*Departamento de Engenharia de Computação e Automação
Centro de Tecnologia
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
CEP 59072-970, Natal, RN, Brasil

ABSTRACT

Trajectory generation is one of the essential modulus of an autonomous robot motion planner. It consists in finding a relation between the path and time in order to be used by the robot control system. This paper shows a trajectory generation method applied to differential drive nonholonomic robots. This method is based on, given a geometric path in an environment, generating a nonholonomic path and sampling it in time taking into account the desired linear velocity developed by the robot between two consecutive sampling steps of the perception system. The proposed technique is simple and computationally quick, permitting its application in motion planners of actual systems.

KEYWORDS: Trajectory generation, nonholonomic constraints, differential drive robot.

RESUMO

A geração de trajetória é um dos blocos essenciais de um planejador de movimento de robôs móveis autônomos. Ela consiste em determinar uma relação entre um caminho admissível e o tempo de forma que esta informação possa ser usada pelo sistema de controle do robô. Este artigo apresenta um método de geração de trajetória para ser utilizado por robôs não-holonômicos com acionamento diferencial. Este método baseia-se em, dado um caminho geométrico em um ambiente de trabalho, gerar um caminho não-holonômico e amostrá-lo no tempo, levando em consideração a velocidade linear desejada do robô durante dois passos consecutivos de amostragem do sistema de percepção. A técnica proposta mostra-se simples e computacionalmente rápida, o que permite a sua utilização em planejadores de movimento de sistemas robóticos reais.

PALAVRAS-CHAVE: Geração de trajetória, restrição não-holonômica, robô com acionamento diferencial.

1 INTRODUÇÃO

Um dos principais problemas em robótica autônoma consiste na implementação de um eficiente planejador de movimento. Tal sistema é responsável pela definição dos movimentos necessários para que um robô execute uma determinada tarefa de maneira satisfatória. É um problema não-trivial cuja solução mais empregada é a sua subdivisão em vários blocos de menor complexidade. A sua aplicação estende-se para diversas classes de robôs, como veículos autônomos e manipuladores. A figura 1 apresenta um diagrama básico do planejador de movimentos contendo os blocos citados.

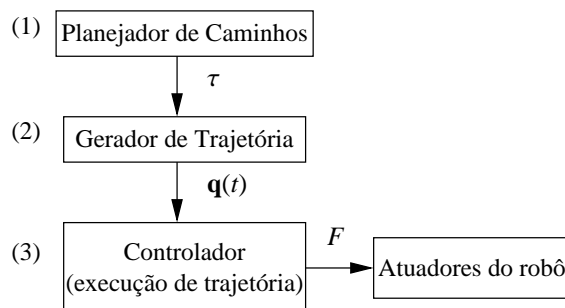


Figura 1: Diagrama de blocos de um planejador de movimento

O planejador de caminhos, apresentado no nível 1, determina um conjunto τ de configurações, ou posições e orientações, entre duas configurações distintas, evitando colisões com os obstáculos no espaço de trabalho. A maioria dos planejadores existentes foi compilada por Latombe (1991) e são denominados *planejadores geométricos* pois resumem-se a seqüências de semi-retas ligando a configuração inicial, \mathbf{q}_i , até a final, \mathbf{q}_f . O gerador de trajetória, presente no nível 2, relaciona as configurações do caminho obtido com o tempo, resultando em uma trajetória $\mathbf{q}(t)$ realizável pelo robô. A literatura apresenta diversos modelos de

geradores de trajetória que podem ser aplicados para diferentes tipos de robôs (Fraichard, 1998; Elnagar e Hussein, 2000; Oriolo et al., 2000; Milam et al., 2000; Pledgie et al., 2002). Por fim, no nível 3 está o sistema de controle. Ele é responsável pela execução da trajetória através da geração de um conjunto F de forças e torques para os atuadores do robô, de modo que o seu movimento no espaço de trabalho seja realizado.

De uma maneira geral, robôs móveis apresentam restrições cinemáticas não-holonômicas que impedem a realização de alguns movimentos. Tal característica implica na adição um novo bloco ao planejador de movimento para que o robô não apresente erros de execução de uma determinada trajetória e, conseqüentemente, problemas em suas tarefas, como a navegação por exemplo. Este novo bloco é responsável por transformar um caminho puramente geométrico em um outro que respeite as restrições existentes e deve estar situado entre o planejador de caminhos e o gerador de trajetórias. Os caminhos de Reeds e Shepp (1990), compostos por concatenações de segmentos de reta e arcos de círculo de raio mínimo, são os exemplos clássicos de adaptadores de caminho para robôs semelhantes aos carros. No caso de robôs com acionamento diferencial, como exemplificado na figura 2, tem-se que o raio mínimo de curvatura é igual a zero, o que degenera os caminhos de Reeds e Shepp na seguinte seqüência de movimentos, dados uma configuração inicial e outra final: 1) uma rotação, sobre o próprio eixo, até apontar para a posição final; 2) um movimento em linha reta até alcançar a posição final; e 3) uma última rotação para atingir a orientação final. Tais movimentos são apropriados para navegação em ambientes estáticos, porém podem representar alguma desvantagem caso deseje-se que o robô atue em ambientes dinâmicos ou na perseguição a algum alvo móvel.

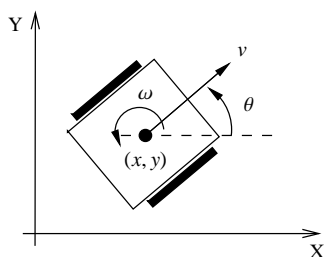


Figura 2: Exemplo de um robô com acionamento diferencial

Alguns outros trabalhos na literatura apresentam adaptadores de caminhos que agem diretamente na geração de trajetória. Arakawa et al. (1995) e Khatib et al. (1997) utilizaram *splines*, como as Curvas de Bezier, por exemplo. Outros utilizaram clotóides geradas a partir das máximas velocidades linear e angular que podem ser desenvolvidas por um robô móvel, como foi proposto por Fleury et al. (1995), ou apresentaram idéias similares, como o trabalho de Choi e Kim (2001). Artigos mais recentes usaram um método de geração de trajetória para robôs móveis baseado no cálculo da cinemática inversa de um manipulador (Mason e Burdick, 2002) ou proporam uma abordagem para a deformação de uma trajetória original com o objetivo de evitar colisões com obstáculos (Lamiroux e Bonnafofus, 2002).

O enfoque principal deste artigo é a geração de trajetórias, onde é proposto um método para ser utilizado por robôs não-holonômicos com acionamento diferencial. A sua aplicação é voltada para ambientes estáticos e atua em conjunto com um

adaptador de caminhos. Ele consiste em, primeiramente, obter um caminho adequado para o robô e, em seguida, amostrá-lo no tempo de acordo com a velocidade média desejada para o movimento entre dois passos de amostragem consecutivos. Esta técnica mostra-se simples, computacionalmente rápida e gera configurações temporizadas para o sistema de controle empregado. Além disso, a trajetória encontrada não implica que uma das velocidades do robô (linear ou angular) deva tornar-se igual a zero, como ocorreria com o algoritmo de Reeds e Shepp.

Uma explanação simplificada do método será apresentada na seção 2, seguindo-se uma abordagem teórica sobre o adaptador de caminhos utilizado (seção 3) e do gerador de trajetória proposto (seção 4). A seção 5 apresentará alguns resultados obtidos para um ambiente estático simulado e, por fim, algumas conclusões e perspectivas para futuros trabalhos (seção 6).

2 MÉTODO PROPOSTO

O método para geração de trajetória apresentado neste trabalho consiste na utilização conjunta de um adaptador de caminhos geométricos e de uma técnica que possa estabelecer a relação entre as configurações do caminho e o tempo. Geradores de caminhos geométricos são necessários especialmente para ambientes com obstáculos estáticos, pois fornecem pontos nos quais não há possibilidade de colisão. Entretanto, tais caminhos isoladamente não são apropriados para um robô com restrições não-holonômicas, tais como veículos autônomos semelhantes a carros ou robôs com acionamento diferencial, pois seus movimentos são limitados a serem colineares com a direção das rodas.

Considerando especificamente um robô com acionamento diferencial (figura 2), a sua configuração é dada por $\mathbf{q} = (x, y, \theta)$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ denota a posição do centro de massa do robô e $\theta \in [-\pi, \pi]$ é o ângulo entre o vetor velocidade linear e o eixo horizontal. Ele possui apenas uma restrição cinemática não-holonômica a qual é representada pela seguinte equação:

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (1)$$

Um caminho apropriado para tal robô é definido como um conjunto de configurações ligando \mathbf{q}_i até \mathbf{q}_f , respeitando a equação 1. Um método bastante empregado em sistemas móveis, de uma maneira geral, consiste em gerar caminhos compostos por arcos de círculo de raio mínimo e segmentos de retas (Reeds e Shepp, 1990). Tal técnica resolve o problema para veículos com limitação no raio de curvatura, mas em robôs com acionamento diferencial implicam em movimentos de rotação em torno do próprio eixo seguidos por movimentos em linha reta. Isto implica que, em determinados instantes, as velocidades linear e/ou angular do robô serão iguais a zero. Para algumas aplicações, como ambientes com obstáculos móveis por exemplo, esta técnica pode não produzir bons resultados. Um outro método alternativo foi proposto por Pedrosa et al. (2002). Ele tem a vantagem do caminho ser determinado através de uma fórmula fechada simples, através da utilização de polinômios paramétricos de terceiro grau. Além disso, o método impede, sempre que possível, que as velocidades linear e angular do robô tornem-se nulas, o que pode ser vantajoso caso deseje-se que o robô efetue um movimento contínuo no espaço de trabalho.

Uma vez que este caminho adequado tenha sido determinado, a etapa de geração de trajetória consiste em amostrá-lo no tempo,

levando-se em consideração a velocidade média desejada para o que o robô execute um movimento durante o intervalo de amostragem do sistema de percepção. O resultado da atuação conjunta destes procedimentos é um gerador de configurações de referência para ser utilizado pelo sistema de controle do robô, formando assim o planejador de movimentos para robôs com acionamento diferencial apresentado pela figura 3.

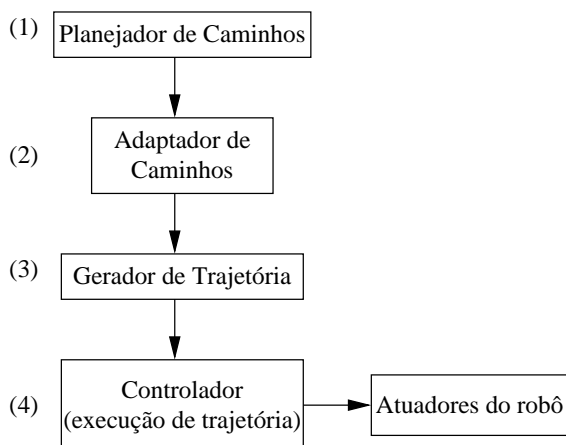


Figura 3: Planejador de movimento completo utilizado para navegação de robôs móveis não-holonômicos

Dessa forma, considerando um espaço de trabalho limitado e povoado por obstáculos poligonais estáticos, o método completo de geração de trajetória consiste no seguinte algoritmo:

1. gerar um caminho geométrico usando algum dos métodos compilados por Latombe (1991);
2. dividir o caminho geométrico em n vértices, ou usar os vértices previamente calculados pelo planejador geométrico;
3. calcular os caminhos não-holonômicos ponto a ponto, entre os vértices intermediários determinados;
4. para cada caminho encontrado deve-se checar a ocorrência de colisões com os obstáculos. Caso alguma ocorra, deve-se aumentar o número de vértices ou gerar uma configuração intermediária neste trecho em particular. Os passos anteriores devem ser repetidos;
5. também para cada caminho não-holonômico obtido, aplicar a geração de trajetória apresentada levando em consideração uma velocidade linear desejada para que o robô execute o movimento. O resultado final é um conjunto de configurações igualmente espaçadas no tempo que deve ser utilizado pelo sistema de controle do robô.

Os primeiro e último vértices corresponderão, respectivamente, às posições inicial e final do caminho não-holonômico total. Para as orientações inicial e final, assume-se que serão iguais aos ângulos desejados de partida e de chegada do robô. Assim, as configurações $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, \theta_i)$ e $\mathbf{q}_f = (x_f, y_f, \theta_f)$ são dados de entrada do algoritmo. As configurações intermediárias, responsáveis pela criação dos sub-caminhos não-holonômicos, são geradas da seguinte forma: cada vértice do caminho geométrico corresponderá a uma posição distinta; para as orientações intermediárias, adota-se a média aritmética entre os ângulos, formados com o eixo horizontal, das semi-retas anterior e posterior ao vértice em questão. Assim, cria-se um vetor de configurações entre \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_f que devem ser ligadas de maneira encadeada atra-

vés de caminhos não-holonômicos. Um exemplo desta geração de configurações intermediárias é apresentado na figura 4.

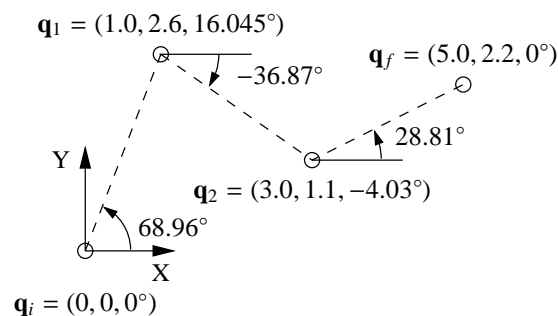


Figura 4: Cálculo das configurações intermediárias para o caminho não-holonômico a partir do caminho geométrico

O método de geração de trajetória proposto pelo algoritmo é sugerido ser completo pelo fato de, dadas duas configurações \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_f como entradas, ter como saída uma trajetória realizável por um robô com acionamento diferencial. As seções seguintes farão uma apresentação formal dos métodos de adaptação de caminho e geração de trajetória propriamente dito.

3 CAMINHOS NÃO-HOLONÔMICOS PONTO A PONTO

O adaptador de caminhos geométricos utilizado baseia-se em polinômios paramétricos de terceiro grau para representar a posição do centro de massa do robô. O ângulo de orientação é imposto de forma a respeitar a restrição cinemática imposta (Pedrosa et al., 2002; Pedrosa et al., 2003). Assim, considerando o j -ésimo caminho não-holonômico, têm-se:

$$\begin{aligned}
 {}^j x(\lambda) &= a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 \\
 {}^j y(\lambda) &= b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda^3 \\
 {}^j \theta(\lambda) &= \tan^{-1} \left(\frac{dy(\lambda)/d\lambda}{dx(\lambda)/d\lambda} \right)
 \end{aligned} \quad (2)$$

onde o parâmetro $\lambda \in [0, 1]$ é adimensional.

Considerando que ${}^j \mathbf{q}_i = ({}^j x_i, {}^j y_i, {}^j \theta_i)$ e ${}^j \mathbf{q}_f = ({}^j x_f, {}^j y_f, {}^j \theta_f)$ são entradas conhecidas, pode-se determinar os valores dos coeficientes a_0, \dots, a_3 e b_0, \dots, b_3 através da substituição destas condições de contorno nas equações 2. Seguindo este procedimento, é obtido um sistema linear cujo número de incógnitas é maior que o número de equações. Para resolvê-lo, arbitram-se os valores de dois coeficientes quaisquer. Assim, uma solução final que aplica-se para a maioria das situações é dada pelas equações 3:

$$\begin{cases}
 a_0 = {}^j x_i \\
 a_1 \Rightarrow \text{arbitrado} \\
 a_2 \Rightarrow \text{arbitrado} \\
 a_3 = \Delta x - a_2 - a_1 \\
 b_0 = {}^j y_i \\
 b_1 = d_i a_1 \\
 b_2 = 3(\Delta y - d_f \Delta x) + d_f a_2 - 2(d_i - d_f) a_1 \\
 b_3 = 3d_f \Delta x - 2\Delta y - d_f a_2 - (2d_f - d_i) a_1
 \end{cases} \quad (3)$$

onde $d_i = \tan {}^j \theta_i$, $d_f = \tan {}^j \theta_f$, $\Delta x = {}^j x_f - {}^j x_i$ e $\Delta y = {}^j y_f - {}^j y_i$.

Quaisquer dois valores atribuídos para a_1 e a_2 resultarão em caminhos que respeitem a restrição imposta pela equação 1, porém nem sempre o resultado encontrado é o melhor dentro um conjunto de infinitas soluções (Pedrosa et al., 2002; Pedrosa et al., 2003). Caso seja adotado algum critério para melhorar o caminho entre ${}^j\mathbf{q}_i$ e ${}^j\mathbf{q}_f$, pode-se definir um intervalo de valores para os coeficientes arbitrados, facilitando a escolha dos seus valores. Vários critérios podem ser empregados, porém o utilizado neste trabalho foi impor que entre o intervalo aberto $\lambda \in (0, 1)$ o caminho seja regular sempre que possível, ou seja, que as funções 2 não tenham pontos de valor máximo ou mínimo. Isto faz com elas sejam monotonicamente crescentes ou decrescentes. Para maiores detalhes ver o trabalho de Pedrosa et al. (2002). Com este critério, dois sistemas de inequações envolvendo os coeficientes arbitrados são obtidos, sendo um para a direção x e outro para a direção y .

Dessa forma, para que o caminho seja regular na direção x , tem-se o sistema de inequações:

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ a_2 \geq -a_1 \\ a_2 \leq 3\Delta x - 2a_1 \end{cases}$$

que apresenta como uma possível solução:

$$a_1 = \Delta x \quad a_2 = 0$$

Para a direção y , o sistema de inequações é:

$$\begin{cases} d_i a_1 \geq 0 \\ d_f a_2 \geq (d_i - 2d_f)a_1 + 3(d_f \Delta x - \Delta y) \\ d_f a_2 \leq 3d_f \Delta x - 2d_f a_1 \end{cases}$$

onde, considerando $d_i > 0$ e $d_f > 0$, tem-se como uma solução:

$$a_1 = \frac{\Delta y}{d_i} \quad a_2 = 3\Delta x - \frac{(2d_f + d_i)\Delta y}{d_i d_f}$$

Para alguns arranjos de ${}^j\mathbf{q}_i$ e ${}^j\mathbf{q}_f$ estes dois sistemas têm soluções em comum, o que permite satisfazer o critério imposto em ambas as direções simultaneamente. Porém, para outros arranjos não há uma solução única. Matematicamente falando, o caminho terá um ponto de máximo ou mínimo nas direções x ou y . Assim, deve-se escolher em qual direção o critério tem que ser atendido. Um modo de realizar esta escolha é verificar em qual direção o caminho terá menor comprimento. A figura 5 mostra alguns caminhos não-holonômicos obtidos entre duas configurações distintas. Nota-se que em um deles a curva não é regular, possuindo um ponto de máximo na direção x .

4 GERAÇÃO DE TRAJETÓRIA

Uma vez obtido o caminho não-holonômico entre os pontos distintos no espaço de trabalho do robô, deve-se utilizar algum método para expressar as configurações encontradas em função do tempo, ou seja, encontrar uma função $\lambda(t)$ para ser usada nas equações 2. Como todo o sistema age de maneira discretizada, a técnica utilizada neste trabalho é baseada em procedimentos simples e consiste em determinar o valor de λ no passo de amostragem seguinte, considerando uma velocidade linear desejada durante o intervalo de amostragem.

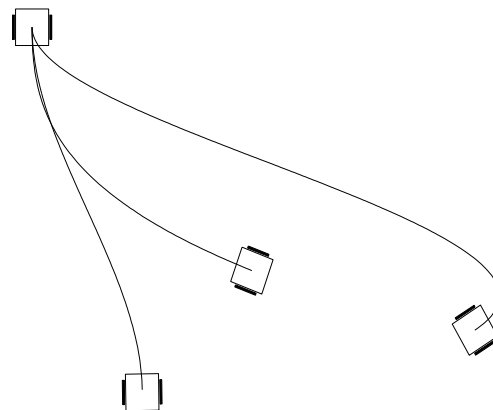


Figura 5: Exemplos de caminhos não-holonômicos

O módulo da velocidade linear do robô é dado por:

$$v(t) = \sqrt{\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt}} \quad (4)$$

e suas componentes nas direções x e y são:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

As derivadas primeiras de ${}^j x(\lambda)$ e ${}^j y(\lambda)$ em relação a λ , facilmente obtidas das equações 2, são dadas por:

$$\begin{aligned} dx/d\lambda &= a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 \\ dy/d\lambda &= b_1 + 2b_2\lambda + 3b_3\lambda^2 \end{aligned} \quad (5)$$

onde os coeficientes a_i e b_i , com $i = 1, 2, 3$, são dados pelas equações 3. Substituindo as equações 5 na equação 4, e isolando o termo $d\lambda/dt$, encontra-se:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{v(t)}{\sqrt{\frac{dx^2}{d\lambda} + \frac{dy^2}{d\lambda}}} \quad (6)$$

cujas integrações resultam na solução do problema.

Porém, sendo o sistema em questão discretizado no tempo, pode-se considerar, sem perda de generalidade, que durante um curto intervalo de amostragem a variação do parâmetro λ com o tempo ($d\lambda/dt$) permanece constante. Adotando, por razões de nomenclatura, $d\lambda_k$, dx_k , dy_k e v_k como sendo, respectivamente, os valores de $d\lambda/dt$, $dx/d\lambda$, $dy/d\lambda$ e $v(t)$ no k -ésimo instante, tem-se que a evolução do parâmetro obedece à seguinte regra:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + d\lambda_k \cdot T$$

onde $d\lambda_k$, calculado a cada passo de amostragem T do sistema de percepção do robô, é dado por:

$$d\lambda_k = \frac{v_k}{\sqrt{dx_k^2 + dy_k^2}}$$

sendo:

$$\begin{aligned} dx_k &= a_1 + 2a_2\lambda_k + 3a_3\lambda_k^2 \\ dy_k &= b_1 + 2b_2\lambda_k + 3b_3\lambda_k^2 \end{aligned}$$

Dessa forma, o termo λ_{k+1} é utilizado nas equações 2 para gerar a próxima configuração de referência para o robô móvel. A figura

6 mostra um exemplo de como a trajetória é desenvolvida entre duas configurações distintas. Nota-se que as configurações assumidas pelo robô são igualmente espaçadas o que demonstra que ele pode executar um movimento constante, caso seja desejado.

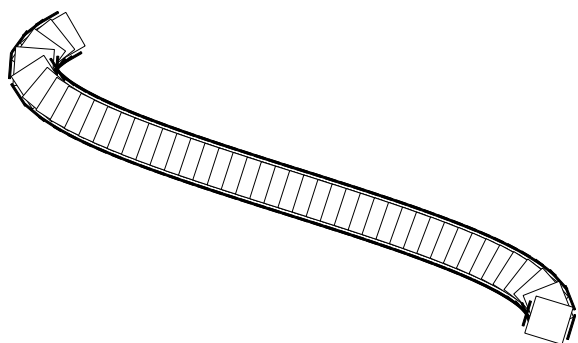


Figura 6: Exemplo de trajetória obtida a partir da amostragem do caminho não-holonômico

5 EXEMPLO DE TRAJETÓRIA

Para testar a aplicabilidade do método de geração de trajetória apresentado, utilizou-se um exemplo de simulação da navegação de um robô móvel em um ambiente estruturado estático e fechado. Quase todas as etapas do algoritmo proposto foram executadas, exceto a do sistema de controle (nível 4 da figura 3) por não ser do escopo deste artigo. Para isto, sugere-se a leitura do artigo de Vieira et al. (2003). O ambiente de trabalho em questão foi povoado com quatro obstáculos poligonais. Como a primeira fase consiste na determinação do caminho geométrico, foi utilizado o método da decomposição do ambiente em células exatas (Latombe, 1991). A figura 7 mostra o caminho geométrico obtido onde os vértices são marcados com círculos.

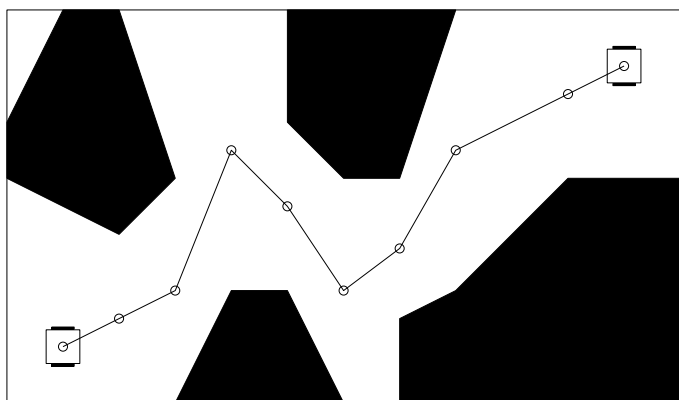


Figura 7: Caminho geométrico obtido com a decomposição do ambiente em células exatas

Em seguida realizou-se a adaptação do caminho geométrico para um não-holonômico equivalente. Para esta fase, primeiro foram geradas as configurações intermediárias, como especificado na seção 2, e para cada caminho não-holonômico testou-se a colisão com os obstáculos. O resultado final é mostrado na figura 8.

Por fim, para a geração de trajetória, adotaram-se $2m/s$, como valor da velocidade média desejada, e $0,033s$, para o intervalo de amostragem. A trajetória gerada é apresentada na figura 9.

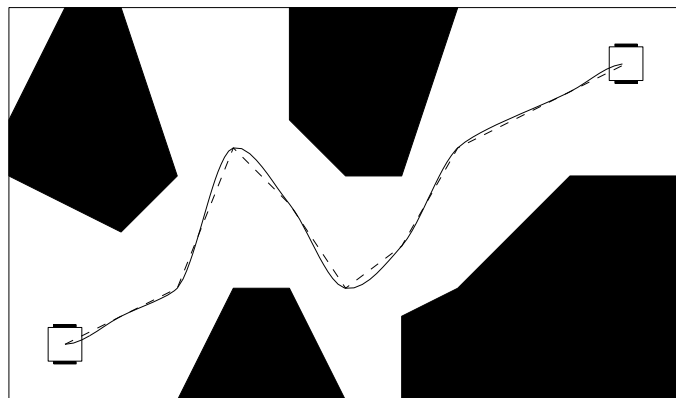


Figura 8: Caminho não-holonômico final obtido com o método dos polinômios cúbicos

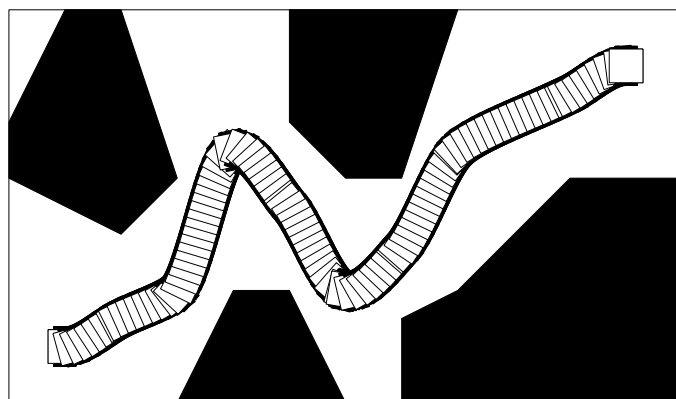


Figura 9: Trajetória final calculada

As figuras 10 exemplificam o procedimento para o desvio de colisões com os obstáculos. Na figura superior, é mostrado um caminho não-holonômico que intersecta um obstáculo. Ao gerar uma nova configuração intermediária entre as configurações inicial e final, consegue-se obter dois novos caminhos não-holonômicos que impedem com que o robô sofra a colisão (figura 10 inferior). Isto pode ser explicado pelo fato de que, quanto maior o número de configurações que são adicionadas para impedir colisões, mais próximo será o caminho não-holonômico do caminho geométrico no trecho em questão. Isto é vantajoso, considerando que o caminho geométrico é totalmente livre de colisões. Porém, se o número n de vértices for suficientemente grande, o caminho não-holonômico tenderá para o caminho geométrico, o que invalidaria o adaptador de caminhos.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um método completo de geração de trajetória aplicado para robôs não-holonômicos com acionamento diferencial. A técnica proposta utiliza um adaptador de caminhos geométricos baseado em polinômios paramétricos cúbicos e um método simples para relacionar o parâmetro destes polinômios com o tempo, levando em consideração a velocidade média desejada para que o robô execute o movimento planejado. Como a abordagem utiliza fórmulas básicas e fechadas para encontrar um caminho não-holonômico e a geração de trajetória apresenta-se de forma trivial, o algoritmo mostrou-se bastante

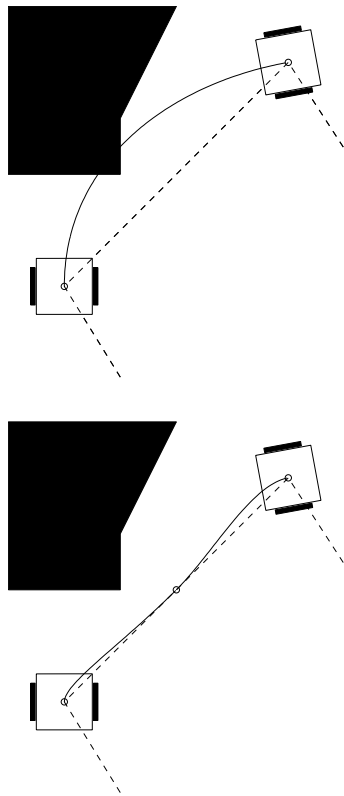


Figura 10: Caminho não-holonômico com colisão (fig. superior) e sem colisão (fig. inferior)

simples, computacionalmente rápido e, portanto, adequado para sistemas reais. Os resultados obtidos com a simulação são satisfatórios para a classe de robôs móveis tratada. Perspectivas para futuros trabalhos concentrarão-se na definição de novos adaptadores de caminho e geradores de trajetória que possam ser aplicados para outros tipos de robôs (semelhantes a carros, robôs com *trailers*, etc.) tanto em ambientes estáticos quanto dinâmicos. Além disso planeja-se projetar sistemas de controle apropriados para robôs com restrições não-holonômicas, o que permite a construção completa de um planejador de movimento.

AGRADECIMENTOS

Diogo Pedrosa agradece à Capes pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- Arakawa, A., Hiyama, M., Emura, T. e Kagami, Y. (1995). Trajectory generation for wheeled mobile robot based on landmarks, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vancouver, Canada.
- Choi, J.-S. e Kim, B. K. (2001). Near-time-optimal trajectory planning for wheeled mobile robots with translational and rotational sections, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **17**(1).
- Elngar, A. e Hussein, A. M. (2000). On optimal constrained trajectory planning in 3d environments, *Robotics and Autonomous Systems* **33**.
- Fleury, S., Souères, P., Laumond, J.-P. e Chatila, R. (1995). Primitives for smoothing mobile robot trajectories, *IEEE*

Transactions on Robotics and Automation **11**(3).

- Fraichard, T. (1998). Trajectory planning amidst moving obstacles: Path-velocity decomposition revisited, *Journal of the Brazilian Computer Society* **4**(3). Special issue on robotics.
- Khatib, M., Jaouni, H., Chatila, R. e Laumond, J.-P. (1997). Dynamic path modification for car-like nonholonomic mobile robots, *International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, USA.
- Lamiroux, F. e Bonnafous, D. (2002). Reactive trajectory deformation for nonholonomic systems: Application to mobile robots, *International Conference on Robotics and Automation*, Washington, DC, USA.
- Latombe, J.-C. (1991). *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Press. ISBN 0-7923-912902.
- Mason, R. e Burdick, J. W. (2002). Trajectory planning using reachable-state density functions, *International Conference on Robotics and Automation*, Washington, DC, USA.
- Milam, M. B., Mushambi, K. e Murray, R. M. (2000). A new computational approach to real-time trajectory generation for constrained mechanical systems, *IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia.
- Oriolo, G., Panzneri, S. e Ulivi, G. (2000). Learning optimal trajectories for nonholonomic systems, *International Journal of Control* **73**(10).
- Pedrosa, D. P. F., Medeiros, A. A. D. e Alsina, P. J. (2002). Geração de caminhos ponto a ponto para robôs móveis com rodas, *Congresso Brasileiro de Automática*, Natal, RN.
- Pedrosa, D. P. F., Medeiros, A. A. D. e Alsina, P. J. (2003). Point-to-point path generation for wheeled mobile robots, *International Conference on Robotics and Automation*, Taipei, Taiwan. To appear.
- Pledgie, S. T., Hao, Y., Ferreira, A. M., Agrawal, S. K. e Murphey, R. (2002). Groups of unmanned vehicles: Differential flatness, trajectory planning, and control, *International Conference on Robotics and Automation*, Washington, DC, USA.
- Reeds, J. A. e Shepp, L. A. (1990). Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards, *Pacific Journal of Mathematics* **145**(2).
- Vieira, F. C., Medeiros, A. A. D. e Alsina, P. J. (2003). Dynamic stabilization of a two-wheeled differential driven nonholonomic mobile robot, *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Bauru, SP.