

GERAÇÃO DE CAMINHOS PONTO-A-PONTO PARA ROBÔS MÓVEIS COM RODAS

DIOGO P. F. PEDROSA, ADELARDO A. D. MEDEIROS, PABLO J. ALSINA

*Dept^o de Eng^a de Computação e Automação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte
59072-970, Natal, RN, Brasil – [diogo, adelardo, pablo]@dca.ufrn.br*

Resumo— Este trabalho propõe um método de geração de caminhos ponto-a-ponto que respeitam as restrições cinemáticas de um robô móvel com duas rodas. O caminho gerado é descrito por curvas contínuas, e não por uma seqüência de arcos de círculos e segmentos de reta. Polinômios paramétricos de terceiro grau são utilizados para calcular as variáveis de configuração do robô, $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$. O ângulo de orientação do robô, $\theta(\lambda)$, é imposto para atender à restrição não-holonômica. São usados os coeficientes livres dos polinômios para aprimorar o caminho, impedindo $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ de terem máximos ou mínimos entre os extremos do caminho. Este critério tende a gerar caminhos mais curtos, evitando movimentos desnecessários.

Abstract— This paper proposes a point-to-point path generation method, consistent with the non-holonomic constraints of a two-wheeled mobile robot. The generated path is described by continuous curves, instead of a chain of different types of curves. Parametric polynomials of third degree are used to calculate the robot configuration variables, $x(\lambda)$ and $y(\lambda)$. The orientation angle, $\theta(\lambda)$, is imposed to respect the non-holonomic constraint. The free polynomial coefficients are used to refine the path, avoiding maximal or minimal values of $x(\lambda)$ and $y(\lambda)$ during the path. This tends to generate shorter paths, avoiding unnecessary backward movements.

Key Words— Wheeled mobile robots, path generation, non-holonomic constraints.

1 Introdução

A geração de caminhos é um dos principais problemas na navegação de robôs móveis. Normalmente, esta geração divide-se em duas fases: a primeira consiste em planejar um caminho geométrico no espaço de trabalho, que vai da configuração inicial do robô para a sua configuração final desejada, sem colisões com os obstáculos do ambiente. A segunda etapa consiste em adaptar este caminho para torná-lo viável para o robô.

A maioria das técnicas existentes para encontrar caminhos sem colisão foi compilada por Latombe (Latombe, 1991). São métodos bem fundamentados cuja eficiência já foi amplamente apresentada na literatura (Choset and Burdick, 1995a; Choset and Burdick, 1995b; Hwang and Ahuja, 1992; Léon and Sossa, 1998).

Quando o robô possui restrições cinemáticas, os caminhos sem colisão calculados pela maioria destes planejadores não são diretamente executáveis pelo robô. Para resolver este problema, deve-se adaptar o caminho geométrico encontrado para um caminho que o robô possa percorrer. Uma possível técnica de adaptação, proposta por Laumond *et al* (Laumond *et al.*, 1994), consiste em:

- dividir o caminho geométrico em n segmentos, o que cria $n + 1$ arestas;
- sem levar em conta os obstáculos, calcular caminhos ponto-a-ponto entre as arestas adjacentes e que sejam executáveis pelo robô;
- verificar se os caminhos ponto-a-ponto geram alguma colisão com obstáculos; em caso afir-

mativo, aumentar o número n de segmentos e refazer o procedimento; caso contrário, o conjunto encadeado dos caminhos ponto-a-ponto constitui o caminho sem colisões para o robô.

Esta abordagem faz surgir a necessidade de calcular caminhos ponto-a-ponto entre duas configurações distintas e que sejam executáveis diante de restrições não-holonômicas. Um método bastante utilizado para isso foi proposto por Reeds e Shepp (Reeds and Shepp, 1990). Eles provaram que para um carro que se move para frente e para trás, o caminho mais curto entre duas configurações pertence a um conjunto finito de combinações de arcos de círculo de raio mínimo e segmentos de reta. Todo caminho proposto por esse método é composto de três elementos encadeados. Para um robô de duas rodas com acionamento diferencial, como o mostrado no esquema da Fig. 1, os arcos de círculo de raio mínimo do movimento reduzem-se a uma rotação em torno do eixo do robô. Isto faz com que o caminho de comprimento mínimo proposto seja sempre formado por:

- uma rotação sobre si mesmo para apontar para o próximo ponto desejado;
- um movimento em linha reta; e
- uma rotação para a orientação final desejada.

Em algumas situações bastante dinâmicas, onde o objetivo final do robô se altera rapidamente^a, o método de Reeds e Shepp não é apropriado quando são utilizados estes robôs com acionamento diferencial. Nestas situações, não é adequado que o robô interrompa a sua trajetória em

^aPor exemplo, no futebol de robôs.

curso para ajustar a orientação em busca do novo ponto final a ser alcançado. Outro problema é que, caso este ponto final seja um alvo móvel com velocidade linear comparável à velocidade do robô^b, corre-se o risco do robô permanecer girando indefinidamente, sem sair da primeira fase de movimento, tentando apontar para o alvo.

Como alternativa, este trabalho propõe uma nova técnica para unir duas configurações no espaço de trabalho. O método proposto normalmente atua em conjunto com métodos de planejamento de caminhos geométricos, responsáveis pela determinação de caminhos sem colisão.

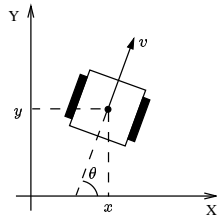


Figura 1. Esquema de um robô móvel com raio de giro igual a zero e suas variáveis x , y e θ , de configuração

A técnica proposta é baseada na utilização de polinômios paramétricos de terceiro grau para calcular as variáveis de configuração do robô, $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ (ver Fig. 1). O ângulo de orientação $\theta(\lambda)$, devido à restrição não-holonômica, não é calculado como uma variável livre, mas é sempre suposto coincidir com a tangente do caminho. O parâmetro λ tem valores entre (0,1), onde os valores extremos desse limite indicam as configurações inicial e final, respectivamente. Polinômios de terceiro grau foram escolhidos porque eles possuem o menor grau em que há parâmetros livres para se refinar os caminhos, segundo os critérios que serão apresentados na seção 5.

Uma característica interessante do método aqui proposto para aplicações em tempo real é a determinação do caminho por uma fórmula fechada e de cálculo extremamente rápido, o que permite a sua determinação a cada passo de amostragem. O método sugerido por Reeds e Shepp, por exemplo, apresenta um total de 68 possíveis caminhos que devem ser testados para se determinar o mais apropriado.

O restante do artigo apresenta-se da seguinte forma: na seção 2 o gerador de caminhos e algumas formulações são apresentados; na seção 3 as singularidades matemáticas do método são analisadas; na seção 4 é mostrado o porquê da necessidade de aprimorar o caminho do robô segundo os critérios que são apresentados na seção 5; na seção 6 alguns resultados são apresentados e por fim, conclusões são mostradas na seção 7.

^bPor exemplo, quando o robô deve alcançar uma bola.

2 Método de Geração do Caminho

A geração de caminhos para robôs móveis com rodas tem que satisfazer às restrições não-holonômicas. No caso de um robô com duas rodas acionadas por mecanismos diferenciais, isso significa que a orientação do robô deve apontar para a direção do vetor velocidade linear. Neste artigo, as variáveis de configuração x e y são geradas por polinômios de terceiro grau com coeficientes desconhecidos, dados pelas Eqs. (1) e (2).

$$x(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 \quad (1)$$

$$y(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3 \quad (2)$$

Para satisfazer à restrição não-holonômica, o ângulo de orientação θ do robô é imposto através da relação mostrada na Eq. (3):

$$\theta(\lambda) = \arctan\left(\frac{dy/d\lambda}{dx/d\lambda}\right) = \arctan(d(\lambda)) \quad (3)$$

onde $d(\lambda)$, introduzido para simplificar a notação, é dado pela Eq. (4):

$$d(\lambda) = \tan(\theta(\lambda)) = \frac{b_1 + 2b_2\lambda + 3b_3\lambda^2}{a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2} \quad (4)$$

Nas Eqs. (1), (2) e (4), o parâmetro λ tem valores entre (0, 1). Quando $\lambda = 0$, o robô está na sua configuração inicial ($x_i, y_i, d_i = \tan(\theta_i)$) e, de modo similar, quando $\lambda = 1$, o robô está na sua configuração final ($x_f, y_f, d_f = \tan(\theta_f)$). Com estas condições de contorno ($x(0) = x_i, y(0) = y_i, d(0) = d_i, x(1) = x_f, y(1) = y_f, d(1) = d_f$), obtém-se um sistema linear com seis equações e oito variáveis, dado pelas Eqs. (5).

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 + 3b_3 + d_f(a_1 + 2a_2 + 3a_3) &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= x_f \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &= y_f \\ b_1 - d_i a_1 &= 0 \\ a_0 &= x_i \\ b_0 &= y_i \end{aligned} \quad (5)$$

Como se tem um número maior de variáveis do que equações, dois dos oito coeficientes podem ser arbitrados. Foram escolhidos a_1 e a_2 como variáveis livres porque obtém-se expressões para os outros coeficientes onde não há divisões, o que evita singularidades na divisão por zero. Desse modo, é obtida uma solução dada pelas Eqs. (6), onde $\Delta x = x_f - x_i$ e $\Delta y = y_f - y_i$.

$$\begin{aligned}
a_0 &= x_i \\
a_3 &= \Delta x - a_1 - a_2 \\
b_0 &= y_i \\
b_1 &= d_i a_1 \\
b_2 &= 3(\Delta y - d_f \Delta x) + 2(d_f - d_i)a_1 + d_f a_2 \\
b_3 &= 3d_f \Delta x - 2\Delta y - (2d_f - d_i)a_1 - d_f a_2
\end{aligned} \tag{6}$$

Quaisquer valores atribuídos aos coeficientes livres a_1 e a_2 resultarão em um caminho que respeita as restrições não-holonômicas e as condições de contorno. Os caminhos gerados, entretanto, nem sempre serão adequados, conforme se detalha na seção 4.

3 Singularidades Matemáticas

O resultado apresentado pelo sistema das Eqs. (6) é aplicável para a maioria das situações, exceto quando θ_i e/ou θ_f forem iguais a $\pm\pi/2$. Nestes casos os termos d_i e/ou d_f tendem a infinito. Três situações devem ser consideradas:

1. quando θ_i e θ_f forem iguais a $\pm\pi/2$; e
2. quando somente θ_i for igual a $\pm\pi/2$; e
3. quando somente θ_f for igual a $\pm\pi/2$.

Diante disto, o sistema da Eq. (5) modifica-se através da análise realizada na Eq. (4). Para que os termos d_i e/ou d_f tendam a infinito, o denominador na Eq. (4) deve tender a zero, o que permite montar outro sistema do qual deve-se escolher outros coeficientes como variáveis livres.

Assim, para o caso θ_i e θ_f iguais a $\pm\pi/2$, tem-se que o resultado do novo sistema é dado pelas Eqs. (7), sendo b_1 e b_2 as variáveis livres.

$$\begin{cases}
a_0 = x_i \\
a_1 = 0 \\
a_2 = 3\Delta x \\
a_3 = -2\Delta x \\
b_0 = y_i \\
b_3 = \Delta y - b_1 - b_2
\end{cases} \tag{7}$$

Para o caso onde só $\theta_i = \pm\pi/2$, escolhem-se a_3 e b_3 como os coeficientes livres. A solução é, então, dada pelas Eqs. (8).

$$\begin{cases}
a_0 = x_i \\
a_1 = 0 \\
a_2 = \Delta x - a_3 \\
b_0 = y_i \\
b_1 = 2(\Delta y - d_f \Delta x) - d_f a_3 + b_3 \\
b_2 = (2d_f \Delta x - \Delta y) + d_f a_3 - 2b_3
\end{cases} \tag{8}$$

Por fim, para o caso onde somente $\theta_f = \pm\pi/2$, podem-se escolher a_1 e b_2 como variáveis livres, obtendo o resultado mostrado pelas Eqs. (9).

$$\begin{cases}
a_0 = x_i \\
a_2 = 3\Delta x - 2a_1 \\
a_3 = a_1 - 2\Delta x \\
b_0 = y_i \\
b_1 = d_i a_1 \\
b_3 = \Delta y - d_i a_1 - b_2
\end{cases} \tag{9}$$

Da mesma forma que para o caso geral, quaisquer valores atribuídos aos coeficientes livres resultarão em caminhos que respeitam as restrições, mas que não são necessariamente adequados.

4 Caminhos Não-aprimorados

Embora os caminhos gerados pelas Eqs. (6), (7), (8) e (9) satisfaçam às restrições não-holonômicas e de contorno, algumas vezes o caminho resultante não é o mais adequado segundo o senso comum, dependendo da escolha dos valores dos coeficientes livres. Por exemplo, a Fig. 2 mostra o resultado obtido para $(x_i, y_i, \theta_i) = (-0.40, -0.40, \frac{\pi}{18})$ e $(x_f, y_f, \theta_f) = (0.40, 0.40, \frac{\pi}{6})$, onde os valores de $a_1 = -1.6863$ e $a_2 = 2.4863$ foram explicitamente escolhidos para exibir este comportamento e o restante dos coeficientes foram calculados através do sistema da Eq. (6).

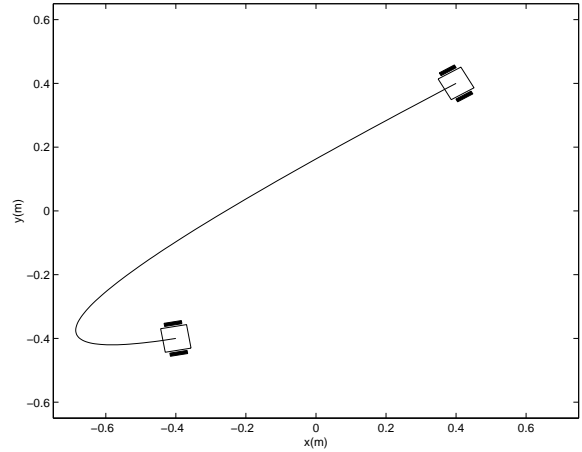


Figura 2. Caminho não adequado de $(-0.4, -0.4, \frac{\pi}{18})$ para $(0.4, 0.4, \frac{\pi}{6})$

Intuitivamente, este caminho apresentado não é o mais adequado, uma vez que ele contém um movimento desnecessário na direção oposta ao alvo, ou seja, durante um determinado instante de tempo a distância entre o robô e o ponto final especificado cresce. Portanto, torna-se importante utilizar um critério de aprimoramento do caminho de forma a encontrar valores mais adequados para os coeficientes livres dos polinômios.

5 Critério de Aprimoramento

O critério de aprimoramento adotado consiste em impedir, sempre que possível, que os polinômios das Eqs. (1) e (2) tenham máximos ou mínimos no intervalo $0 < \lambda < 1$. Isto elimina eventuais movimentos de ida e vinda, como no exemplo da Fig. 2. Uma outra consequência interessante é que, caso este critério de aprimoramento possa ser atendido, os caminhos ficam confinados ao quadrilátero delimitado pelas posições inicial e final.

Assim, considerando-se as derivadas em relação a λ das Eqs. (1) e (2), dadas pelas Eqs. (10) e (11):

$$dx/d\lambda = a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 \quad (10)$$

$$dy/d\lambda = b_1 + 2b_2\lambda + 3b_3\lambda^2 \quad (11)$$

as suas raízes devem atender uma das seguintes condições:

- as duas raízes são complexas; ou
- as duas raízes são menores ou iguais a 0; ou
- as duas raízes são maiores ou iguais a 1; ou
- uma raiz é menor ou igual a 0 e a outra, maior ou igual a 1.

A primeira condição implica que o discriminante (Δ) da equação de segundo grau deva ser negativo; as outras podem ser matematicamente expressadas usando o critério de Routh-Hurwitz (Ogata, 1997), de forma direta ou através de alguma mudança de variável.

Aplicando-se separadamente estas condições para as Eqs. (10) e (11), encontram-se dois sistemas distintos de inequações que delimitam duas regiões no espaço dos coeficientes livres, uma para satisfazer o critério de aprimoramento na direção x e outra, na direção y . Como os coeficientes livres são diferentes para o caso geral e para os casos onde θ_i e/ou θ_f são iguais a $\pm\pi/2$, será feito um estudo separado para cada uma destas situações.

5.1 Regiões para o Caso Geral

A região $a_1 \times a_2$ que satisfaz o critério de aprimoramento para $x(\lambda)$ é delimitada por um sistema dado pelas Ineqs. (12). Para $\Delta x > 0$, esta região pode ser visualizada na Fig. 3.

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ a_2 \geq -a_1 \\ a_2 \leq 3\Delta x - 2a_1 \end{cases} \quad (12)$$

Cálculos similares podem ser feitos para a direção y . Chega-se então à região admissível delimitada pelo sistema das Ineqs. (13). Para $\Delta x > 0$ e $\Delta y > 0$, esta região é mostrada na Fig. 4 se $d_i > 0$ e $d_f > 0$ e na Fig. 5 se $d_i > 0$ e $d_f < 0$.

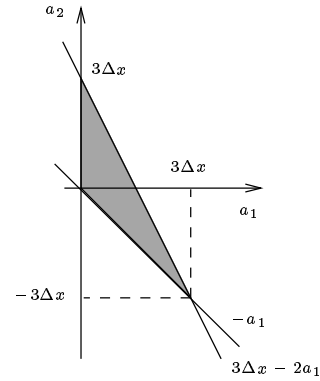


Figura 3. Região que satisfaz as restrições em $x(\lambda)$, considerando $\Delta x > 0$

$$\begin{cases} d_i a_1 \geq 0 \\ d_f a_2 \geq (d_i - 2d_f) a_1 + 3(d_f \Delta x - \Delta y) \\ d_f a_2 \leq 3d_f \Delta x - 2d_f a_1 \end{cases} \quad (13)$$

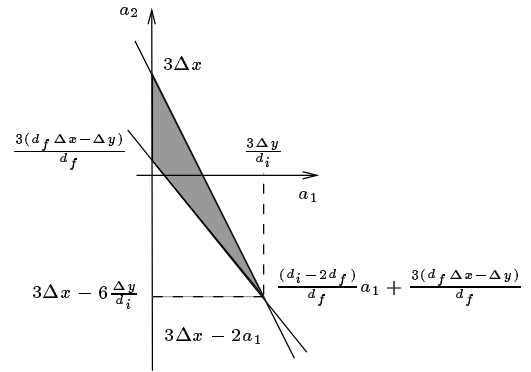


Figura 4. Região que satisfaz as restrições em y , para Δx e Δy positivos, $d_i > 0$ e $d_f > 0$

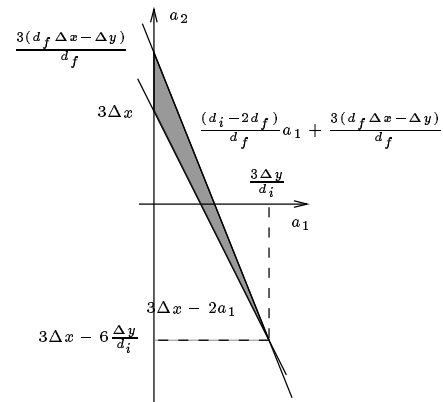


Figura 5. Região que satisfaz as restrições em y , para Δx e Δy positivos, $d_i > 0$ e $d_f < 0$

Para se encontrar valores para os coeficientes a_1 e a_2 que satisfazem o aprimoramento nas direções x e y simultaneamente, é preciso

determinar-se a interseção entre as regiões delimitada pelas Ineqs. (12) e (13) e escolher um ponto dentro desta região resultante. Para simplificar a análise, Δx e Δy serão supostos sempre positivos. Isto não gera perda de generalidade: se, por exemplo, Δx for negativo, ele será tomado em módulo e, ao final do cálculo, basta que os sinais dos coeficientes a_1 , a_2 e a_3 sejam trocados. Se Δy for negativo, toma-se o módulo e os sinais dos coeficientes b_1 , b_2 e b_3 devem ser trocados ao final.

Pela análise dos sistemas (12) e (13), conclui-se que só existe uma interseção não-nula entre as regiões quando d_i e d_f forem ambos positivos. Isto se percebe nos exemplos mostrados nas Figs. 3 e 4, onde há interseção, e nas Figs. 3 e 5, onde não há interseção.

Deste modo, as condições para as direções x e y podem ser satisfeitas de maneira conjunta apenas quando o robô estiver orientado para o interior do retângulo definido pelas suas posições inicial e final tanto no início quanto no fim da trajetória. Quando não for este o caso, só será possível aprimorar o caminho em uma das duas direções. A Fig. 6 ilustra estas duas situações.

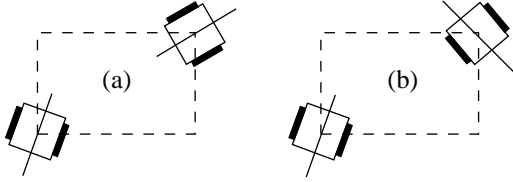


Figura 6. Situações onde (a) é possível; (b) não é possível aprimorar o caminho nas duas direções

5.2 Regiões para os Casos de Singularidades

O mesmo critério de aprimoramento imposto ao caso geral, onde os ângulos inicial e final são diferentes de $\pm\pi/2$, aplica-se às singularidades apresentadas na seção 3. Desse modo, uma vez que são utilizados outros coeficientes livres, outras regiões são obtidas. De forma similar, considera-se que os termos Δx e Δy são positivos.

Para a situação em que θ_i e θ_f são iguais a $\pm\pi/2$, somente o polinômio $y(\lambda)$ depende dos coeficientes livres, como mostrado nas Eqs. (7). O critério de aprimoramento é sempre satisfeito na direção x . A região para y é delimitada pelas Ineqs. (14).

$$\begin{cases} b_1 \geq 0 \\ b_2 \geq -b_1 \\ b_3 \geq -2b_1 + 3\Delta y \end{cases} \quad (14)$$

Para o caso onde somente $\theta_i = \pm\pi/2$, a região que atende a $x(\lambda)$ é dado pela Ineq. (15).

$$-2\Delta x \leq a_3 \leq \Delta x \quad (15)$$

enquanto para $y(\lambda)$ é delimitada pelas Ineqs. (16).

$$\begin{cases} a_3 \geq -2\Delta x \\ b_3 \leq \Delta y \\ b_3 \geq d_f a_3 - 2(\Delta y - d_f \Delta x) \end{cases} \quad (16)$$

E, por fim, quando somente $\theta_f = \pm\pi/2$, o resultado para $x(\lambda)$ é dado pela Ineq. (17).

$$0 \leq a_1 \leq 3\Delta x \quad (17)$$

E, para $y(\lambda)$, delimitada pelas Ineqs. (18).

$$\begin{cases} a_1 \geq 0 \\ b_2 \geq -d_i a_1 \\ b_2 \leq -2d_i a_1 + 3\Delta y \end{cases} \quad (18)$$

Nestes casos sempre existem valores dos coeficientes livres que permitem satisfazer de forma simultânea o critério de aprimoramento nas direções x e y .

6 Exemplos de Utilização

A Fig. 7 mostra um caminho onde o critério de aprimoramento pode ser aplicado para ambos os eixos. As configurações inicial e final são as mesmas do caminho mostrado na Fig. 2, mas o caminho calculado é intuitivamente bem mais adequado, além de estar confinado ao retângulo definido pelos extremos da trajetória.

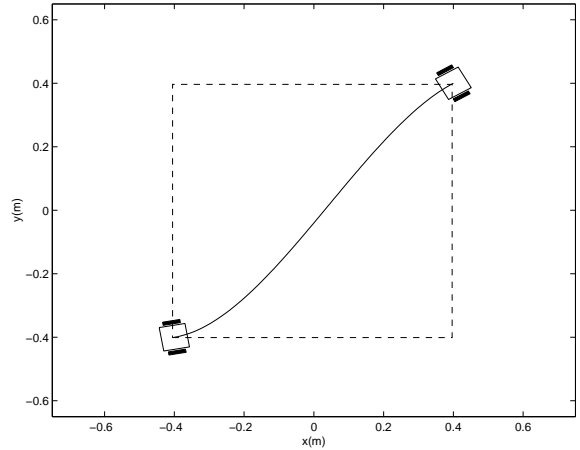


Figura 7. Caminho aprimorado, satisfazendo $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ simultaneamente, de $(-0.40, -0.40, \frac{\pi}{18})$ para $(0.40, 0.40, \frac{\pi}{6})$

A Fig. 8 exemplifica uma situação onde o aprimoramento nas duas direções não é possível. São mostrados dois caminhos, onde em um deles $x(\lambda)$ foi submetido ao critério e $y(\lambda)$ no outro.

7 Conclusões

A principal contribuição deste artigo é um método de geração de caminhos ponto-a-ponto que res-

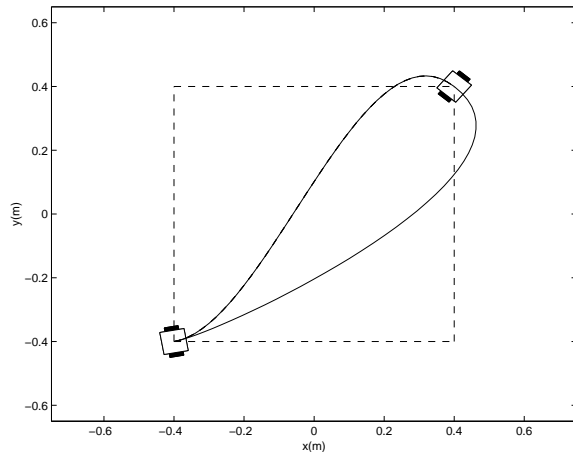


Figura 8. Caminhos aprimorados satisfazendo $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$ separadamente, de $(-0.40, -0.40, \frac{\pi}{9})$ para $(0.40, 0.40, \frac{-2\pi}{9})$

peitam restrições não-holonômicas onde os caminhos gerados são descritos por funções polinomiais contínuas e não por uma cadeia de diferentes segmentos. Assim, um novo caminho pode ser recalculado a cada passo, levando em consideração somente a atual configuração inicial e a configuração final desejada.

O método proposto pode trabalhar em conjunto com técnicas padronizadas de planejamento de caminhos geométricos sem colisão. Em um ambiente sem obstáculos ou com obstáculos distribuídos de forma esparsa, como o ambiente de futebol de robôs, a técnica proposta pode ser utilizada como planejador de caminhos, desde que associada a métodos locais de desvio de obstáculos.

O critério de refinamento adotado garante que o robô sempre se movimenta reduzindo monotonicamente a distância até o alvo nos eixos x e y , no melhor caso, ou ao menos em um deles. No melhor caso, isto permite garantir o confinamento do robô ao retângulo delimitado pelos extremos do caminho desejado. Esta propriedade pode ser útil em algumas situações como, por exemplo, em possíveis testes de colisão.

Extensões deste trabalho incluem geração de perfis de velocidade para os caminhos encontrados, testes comparativos com outros adaptadores de caminhos geométricos para robôs com restrições não-holonômicas, como clotóides, pesquisa de novos critérios para aprimorar o caminho e análise de outros graus de liberdade para garantir outros aspectos, como caminhos de comprimento mínimo.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio do projeto RE-ENGE da FINEP. Diogo Pedrosa foi bolsista do CNPq durante parte da duração do projeto.

Referências

- Choset, H. and Burdick, J. (1995a). Sensor based planning, part 01: The generalized voronoi graph, *International Conference on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan.
- Choset, H. and Burdick, J. (1995b). Sensor based planning, part 02: Incremental construction of the generalized voronoi graph, *International Conference on Robotics and Automation*, Nagoya, Japan.
- Hwang, Y. K. and Ahuja, N. (1992). A potential field approach to path planning, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **8**(1).
- Latombe, J.-C. (1991). *Robot Motion Planning*, Kluwer Academic Press. ISBN 0-7923-912902.
- Laumond, J.-P., Jacobs, P. E., Taïx, M. and Murray, R. M. (1994). A motion planner for nonholonomic mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **10**(5).
- Léon, J. L. D. d. and Sossa, J. H. (1998). Automatic path planning for a mobile robot among obstacles of arbitrary shape, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **28**(3). Part B: Cybernetics.
- Ogata, K. (1997). *Modern Control Engineering*, 3 edn, Prentice Hall, EUA. ISBN 0-13-227307-1.
- Reeds, J. A. and Shepp, L. A. (1990). Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards, *Pacific Journal of Mathematics* **145**(2).