

Introdução às Redes de Petri

Prof. Dr. Carlos Renato Lisboa Francês
Laboratório de Computação Aplicada – LACA
Universidade Federal do Pará - UFPA
rfrances@ufpa.br
Agosto de 2003

1. Redes de Petri

Rede de Petri é uma técnica de modelagem que permite a representação de sistemas, utilizando como alicerce uma forte base matemática [MAC96]. Essa técnica possui a particularidade de permitir modelar sistemas paralelos, concorrentes, assíncronos e não-determinísticos [VAL80].

A representação gráfica de uma rede de Petri básica é formada por dois componentes: um ativo chamado de **transição** (barra) e outro passivo denominado **lugar** (círculo). Os lugares equivalem às variáveis de estado e as transições correspondem às ações realizadas pelo sistema [MAC96]. Esses dois componentes são ligados entre si através de arcos dirigidos. Os arcos podem ser únicos ou múltiplos. A figura 1 mostra os elementos básicos de um grafo associado às redes de Petri.

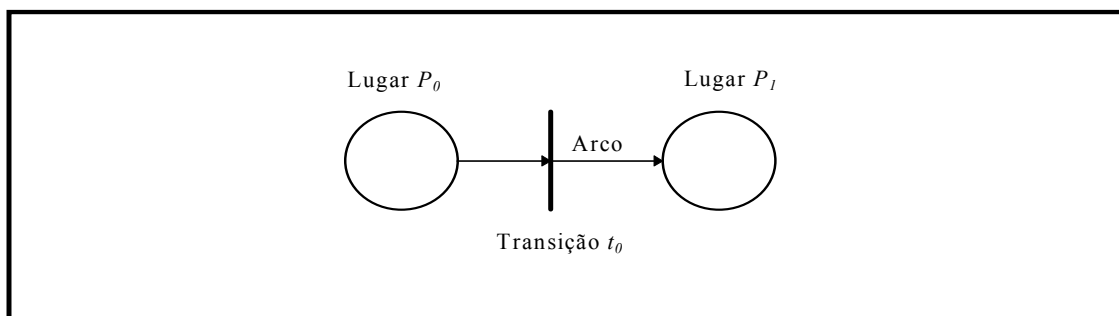


Figura 1. Grafo e seus Elementos Básicos.

1.1. Definições

As redes de Petri podem ser enfocadas através de três fundamentações diferentes. A primeira utiliza a teoria *bag* como suporte. A segunda usa os conceitos da álgebra matricial. A última se fundamenta na estrutura definida por relações. A seguir são apresentadas as definições formais de cada uma dessas fundamentações.

• Fundamentações para Redes de Petri

- **Definição 1:** uma rede de Petri R é uma quintupla $R = (P, T, I, O, K)$, onde $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é um conjunto finito não-vazio de lugares, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ é um conjunto finito não-vazio de transições. $I : T \rightarrow P$ é um conjunto de *bags*¹ que representa o mapeamento de transições para lugares de entrada. $O : T \rightarrow P$ é um conjunto de *bags* que representa o mapeamento de transições para lugares de saída. $K : P \rightarrow N$ é o conjunto das capacidades associadas a cada lugar, podendo assumir um valor infinito [PET81].

¹ *Bag* é uma generalização do conceito de conjunto que admite a repetição de elementos. Na notação de *bags*, utiliza-se $[]$, enquanto que para denotar conjuntos, utiliza-se $\{ \}$ [MAC96].

Para exemplificar a definição 1, supõe-se que se deseje representar um ano letivo de uma Universidade. O ano letivo começa com o primeiro período (semestre) letivo, seguido das primeiras férias (de julho), logo após, tem-se o segundo período letivo, e finalmente as férias de final de ano. Assim, o ano letivo poderia ser representado conforme a figura 2.

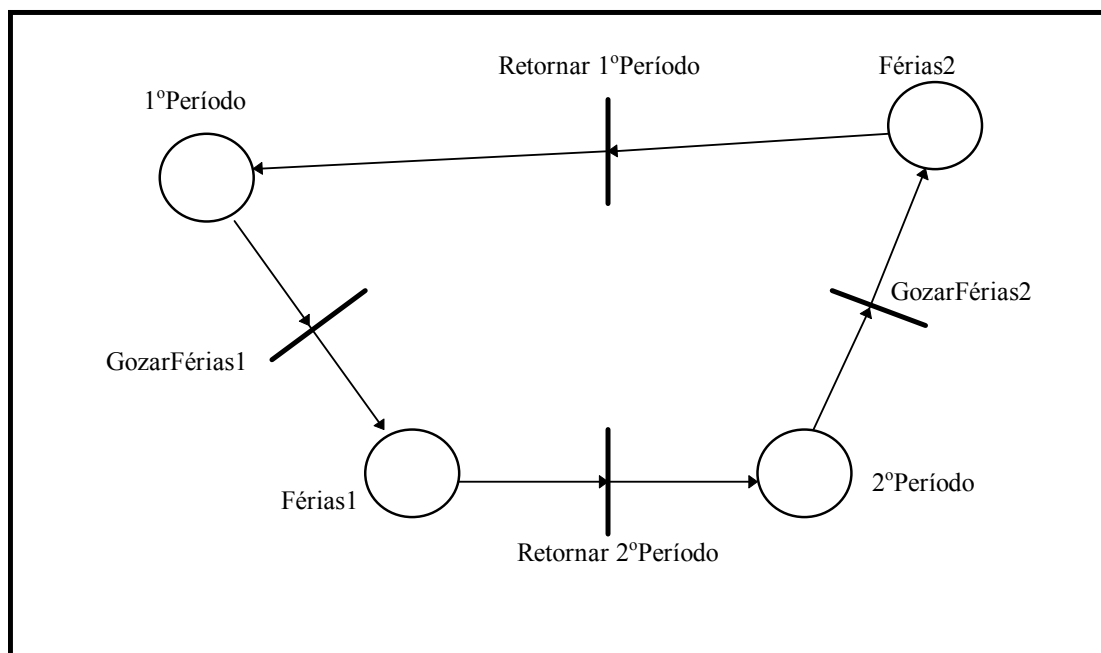


Figura 2. Ano Letivo Representado Graficamente em Redes de Petri.
A figura 2 pode ser descrita da seguinte forma, utilizando-se a definição 1:

$R_{\text{Ano_Letivo}} = (P, T, I, O, K)$, onde

o conjunto de lugares P é

$P = \{1^\circ\text{Período}, \text{Férias1}, 2^\circ\text{Período}, \text{Férias2}\};$

o conjunto de transições T é

$T = \{\text{GozarFérias1}, \text{Retornar}2^\circ\text{Período}, \text{GozarFérias2}, \text{Retornar}1^\circ\text{Período}\};$

o conjunto de *bags* de entrada I é

$I = \{ I(\text{GozarFérias1}) = [1^\circ\text{Período}], I(\text{Retornar}2^\circ\text{Período}) = [\text{Férias1}], \\ I(\text{GozarFérias2}) = [2^\circ\text{Período}], I(\text{Retornar}1^\circ\text{Período}) = [\text{Férias2}] \};$

o conjunto de *bags* de saída O é

$O = \{ O(\text{GozarFérias1}) = [\text{Férias1}], O(\text{Retornar}2^\circ\text{Período}) = [2^\circ\text{Período}], \\ O(\text{GozarFérias2}) = [\text{Férias2}], O(\text{Retornar}1^\circ\text{Período}) = [1^\circ\text{Período}] \};$

e o conjunto de capacidades dos lugares é

$$K = \{ K_{1oPeríodo} = 1, K_{Férias1} = 1, K_{2oPeríodo} = 1, K_{Férias2} = 1 \}.$$

- **Definição 2:** a estrutura de uma rede de Petri, segundo o ponto de vista matricial, é uma quintupla $R = (P, T, I, O, K)$, onde P é um conjunto finito de lugares. T é um conjunto finito de transições, $I : P \times T \rightarrow N$ é a matriz de pré-condições. $O : P \times T \rightarrow N$ é a matriz de pós-condições. K é o vetor das capacidades associados aos lugares ($K : P \rightarrow N$) [PET81].

Tomando-se como base novamente a figura 2, tem-se:

Os conjuntos de lugares e transições são idênticos àqueles vistos para a definição 1.

A matriz I (pré-condições) é

$$I = \begin{array}{c|cccc|c} & \text{GozarFérias1} & \text{Retornar2ºPeríodo} & \text{GozarFérias2} & \text{Retornar1ºPeríodo} & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1ºPeríodo \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & Férias1 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 2ºPeríodo \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & Férias2 \\ \hline \end{array}$$

A matriz O (pós-condições) é:

$$O = \begin{array}{c|cccc|c} & \text{GozarFérias1} & \text{Retornar2ºPeríodo} & \text{GozarFérias2} & \text{Retornar1ºPeríodo} & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 1 & 1ºPeríodo \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & Férias1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 2ºPeríodo \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & Férias2 \\ \hline \end{array}$$

É importante ressaltar que as matrizes I e O representam as pré e pós-condições, respectivamente, de todas as transições da rede.

- **Definição 3:** a estrutura de redes de Petri, usando-se relações, é formada por uma quintupla $R = (P, T, A, V, K)$, onde P é o conjunto de lugares, T o de transições, A o conjunto dos arcos e V corresponde ao conjunto de valorações desses arcos. Os elementos de A são arcos que conectam transições a lugares ou lugares a transições ($A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$). Assim, os elementos de A podem ser agrupados em dois subconjuntos - o conjunto das entradas às transições e o de saída às transições, $I = \{(p_i, t_j)\}$ e $O = \{(t_j, p_i)\}$, respectivamente [MUR89].

Tomando-se ainda como referência a figura 2, tem-se que os conjuntos de lugares (P), de transições (T) e de capacidades (K) permanecem inalterados. Entretanto, na notação

que utiliza relações, há o surgimento de dois novos conjuntos: o conjunto de arcos (A) e o conjunto de valores para esses arcos (V).

o conjunto de arcos A é

$$A = \{ (1^{\circ}\text{Período}, \text{GozarFérias1}), (\text{GozarFérias1}, \text{Férias1}), (\text{Férias1}, \text{Retornar2}^{\circ}\text{Período}), \\ (\text{Retornar2}^{\circ}\text{Período}, 2^{\circ}\text{Período}), (2^{\circ}\text{Período}, \text{GozarFérias2}), \\ (\text{GozarFérias2}, \text{Férias2}), (\text{Férias2}, \text{Retornar1}^{\circ}\text{Período}), \\ (\text{Retornar1}^{\circ}\text{Período}, 1^{\circ}\text{Período}) \}$$

o conjunto de valores dos arcos V é

$$V = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

- **Redes de Petri Marcadas**

Marcas (*tokens*) são informações atribuídas aos lugares, para representar a situação (estado) da rede em um determinado momento. Define-se uma rede de Petri marcada pela dupla $RM = (R, M_0)$, onde R é a estrutura da rede e M_0 a marcação inicial [MAC96]. Assim, para simular o comportamento dinâmico dos sistemas, a marcação da rede de Petri é modificada a cada ação realizada (transição disparada). A figura 3 [MAC96] ilustra uma rede marcada.

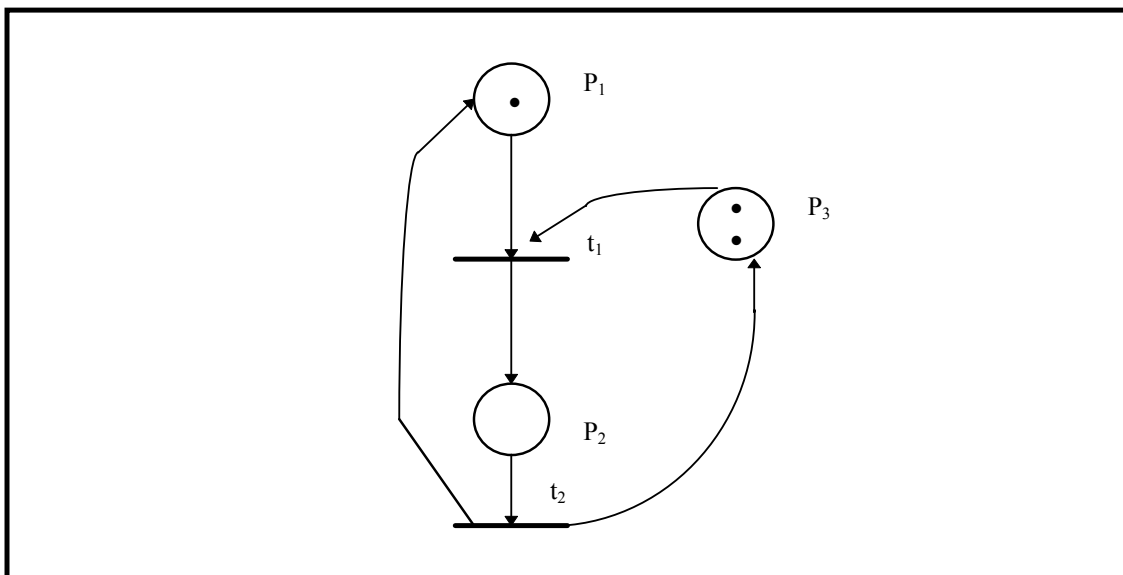


Figura 3. Rede Marcada.

- **Notações Particulares**

Em alguns casos, deseja-se representar a diferença entre transições, visando melhorar a clareza do modelo. Além disso, em muitas situações, pretende-se representar a execução de uma condição externa ao sistema modelado. Para representar rótulos de transições, utiliza-se um alfabeto qualquer associado à rede (por exemplo, o alfabeto a, b, c, \dots, z). Para representar as condições externas, usa-se o mesmo esquema utilizado para rotular transições, entretanto, os símbolos vêm entre parênteses (conforme ilustra a figura 4).

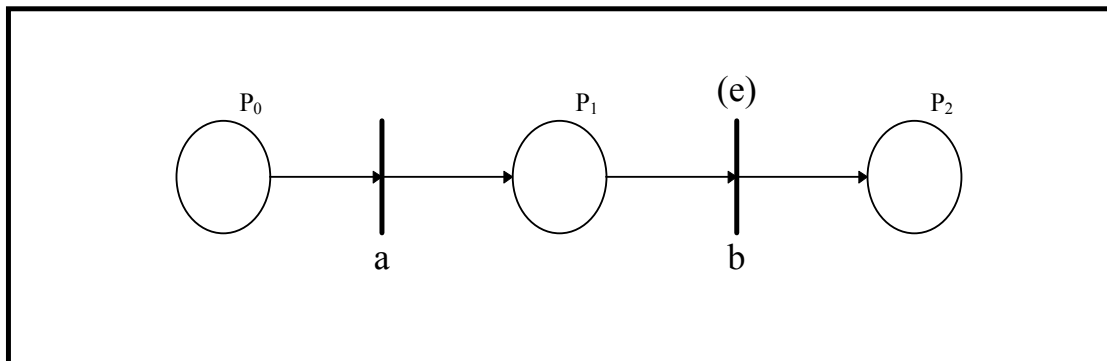


Figura 4. Rótulos e Condições Externas às Transições.

1.2. Classes das Redes de Petri

Podem-se agrupar as redes de Petri em duas grandes classes: as Ordinárias e Não-Ordinárias (de Alto nível) [MAC96]. As **redes ordinárias** se caracterizam pelo tipo de suas marcas, ou seja, suas marcas são do tipo inteiro e não negativo, enquanto que as de alto nível possuem marcas de tipos particulares. As redes ordinárias se subdividem em:

- Rede Binária: é a rede mais elementar dentre todas. Essa rede só permite no máximo um *token* em cada lugar, e todos os arcos possuem valor unitário.
- Rede *Place-Transition*: é o tipo de rede que permite o acúmulo de marcas no mesmo lugar, assim como valores não unitários para os arcos.

As redes de alto nível são caracterizadas pelos tipos de suas marcas, que não são mais elementos do tipo inteiro positivo. Esse tipo de rede permite a individualização de uma marca (pertencente a um grupo) em um mesmo lugar. Essa individualização pode ser realizada através de vários artifícios, como por exemplo, cor da marca ou objetos representando os *tokens*. Redes não-ordinárias não aumentam o poder de representação de um modelo. Entretanto, elas permitem uma maior clareza e um maior (ou menor) nível de abstração ao modelo.

- **Redes Elementares**

Nesta seção, são apresentadas algumas redes que, a partir delas, derivam muitas outras redes mais complexas. São discutidas as redes representativas de seqüenciamento, distribuição, junção, escolha não-determinística e atribuição.

- Seqüenciamento: é a rede que representa a execução de uma ação, desde que uma determinada condição seja satisfeita. Após a execução dessa ação, pode-se ter outra ação, desde que satisfeita outra determinada condição (figura 5).

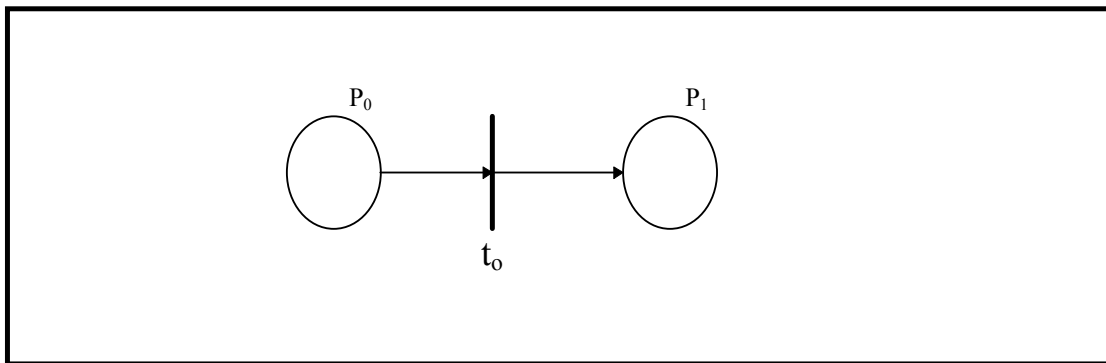


Figura 5. Seqüenciamento.

- Distribuição: é a rede elementar utilizada na criação de processos paralelos a partir de um processo pai. Os processos filhos são criados através da distribuição dos tokens encontrados no processo (lugar) pai. A distribuição é mostrada na figura 6.

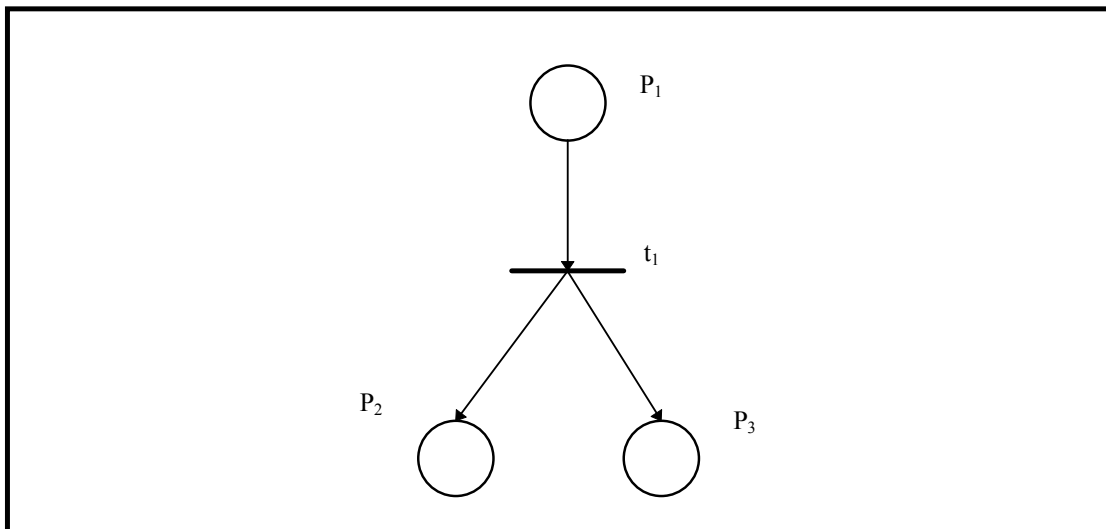


Figura 6. Distribuição.

- Junção: é a rede que modela a sincronização entre atividades concorrentes. No exemplo da figura 7, a transição t_1 só dispara quando existirem fichas tanto em P_1 , quanto em P_2 , estabelecendo, assim, o sincronismo.

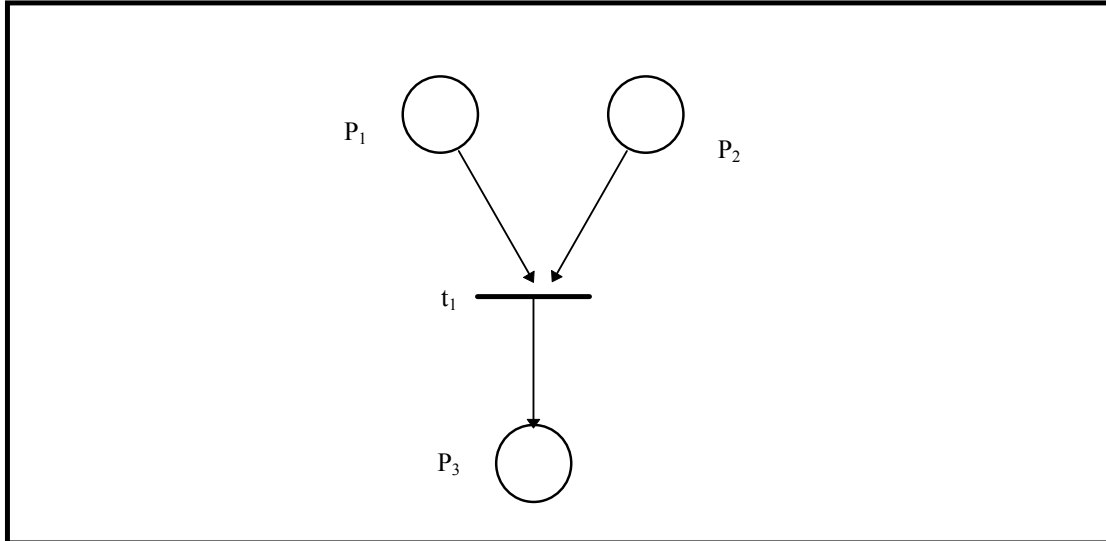


Figura 7. Junção.

- Escolha Não-Determinística: é uma rede que ao se disparar uma transição, inabilita-se a outra. Entretanto, não existe possibilidade de escolha (conforme figura 8). O fator não-determinístico dessa rede gera uma situação chamada de conflito [MAC96]. O conflito pode ser classificado como estrutural ou efetivo. Ambos os conflitos estão associados ao fato de duas transições possuírem o mesmo lugar como entrada. Porém, se a rede não possuir *tokens*, o conflito é dito estrutural. Contudo, se há uma única marca no lugar comum às transições, diz-se que o conflito é efetivo. A figura 9 [MAC96] ilustra os dois tipos de conflito.

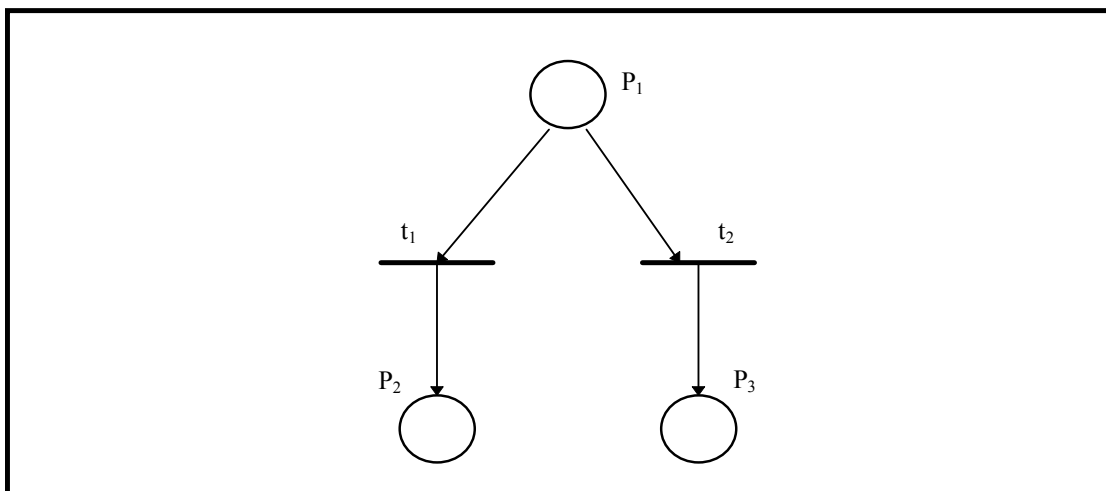


Figura 8. Escolha Não-Determinística.

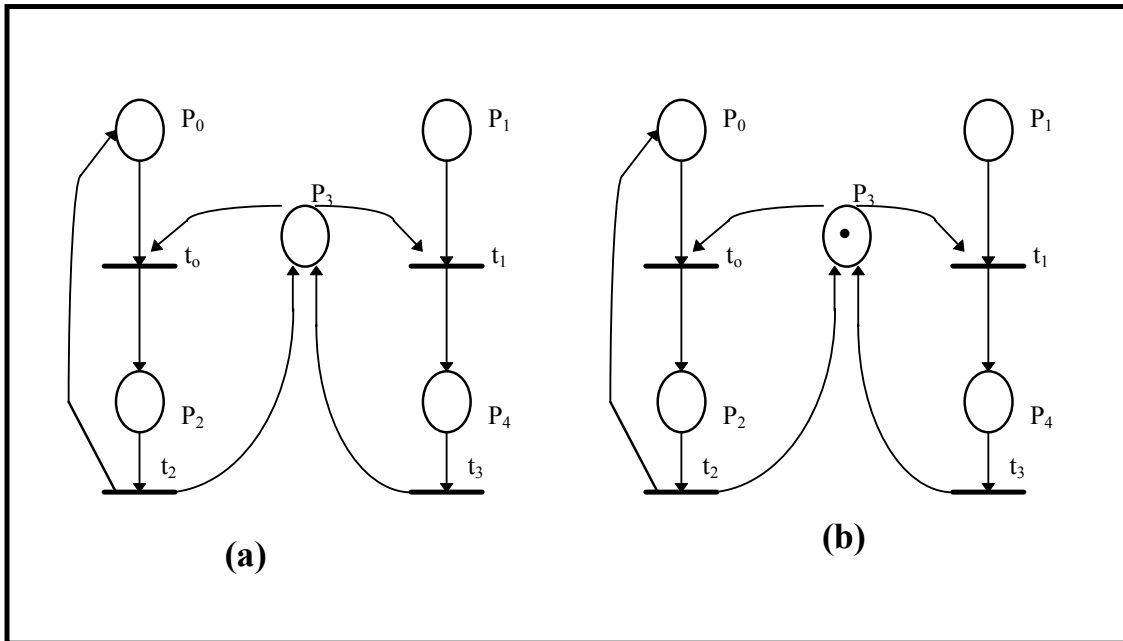


Figura 9. (a) Conflito Estrutural e (b) Conflito Efetivo.

A escolha determinística da transição a ser disparada não é um recurso abordado nas redes elementares. Porém, essa deficiência das redes de Petri originais são resolvidas em algumas extensões propostas, abordadas em seções posteriores.

1.3. Redes de Petri em Protocolos de Comunicação

Uma das áreas mais interessantes para aplicação de modelagem (especialmente redes de Petri) é a área da representação de protocolos de comunicação. Em protocolos, geralmente, as transições são bem nítidas (por exemplo, a transmissão ou recepção de uma mensagem). Muitas situações que são mutuamente exclusivas se fazem presentes (como a escolha entre um receptor dentre vários). A figura 10 [MAC96] mostra o comportamento de um protocolo bastante simples. Apesar de simples, o modelo apresenta situações interessantes para discussão.

O funcionamento do protocolo da figura 10 se fundamenta basicamente na decisão de qual receptor (1 ou 2) deve aceitar a mensagem. Nesse exemplo específico, a escolha é não-determinística, isto é, não se pode decidir qual o arco que o *token* deve seguir. Além disso, a escolha é mutuamente exclusiva, ou seja, apenas uma das transições será habilitada (t_2 ou t_4). A escolha citada se processa quando o *token*, que vem de t_0 , chega ao lugar P_6 . Nesse ponto, o *token* ou parte para o Receptor1 (habilitando a transição t_2), ou para o Receptor2 (habilitando a transição t_4). A partir daí, após a escolha do receptor, o *token* segue para um *buffer* (P_3 no Receptor 1, ou P_4 no Receptor 2), para ser reconhecido pelo disparo da transição t_3 (Receptor 1) ou t_5 (Receptor 2).

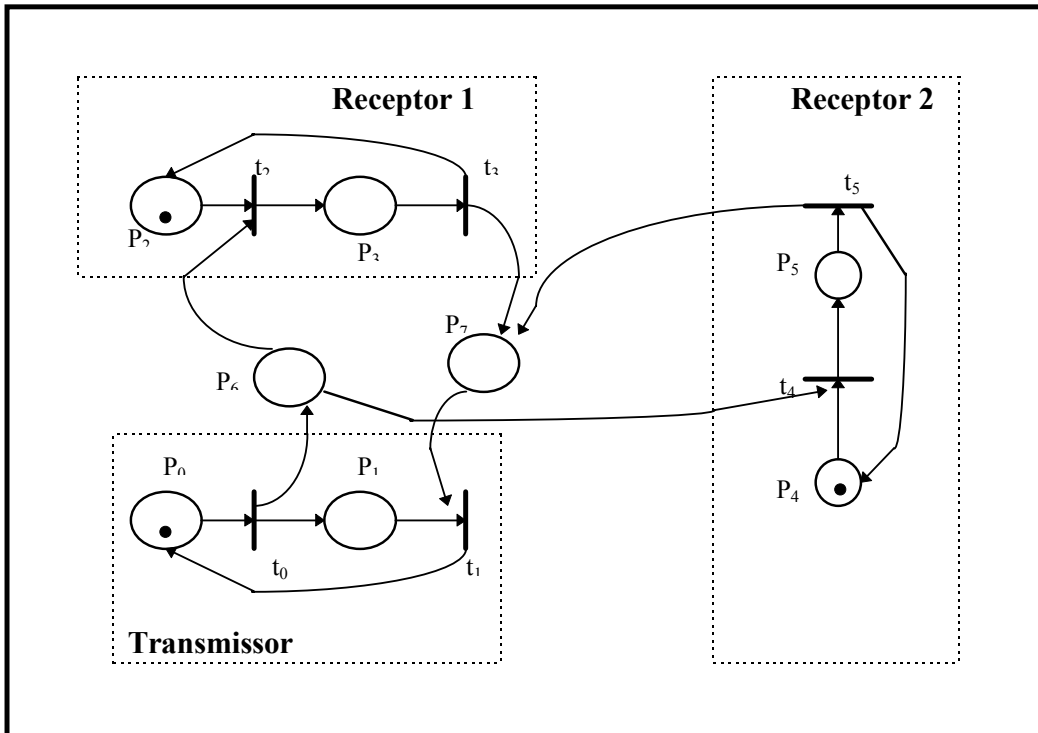


Figura 10. Protocolo de Comunicação.

O modelo é interessante para representar um protocolo que trabalhe de maneira aleatória. Entretanto, nem sempre é interessante se valer dessa situação (a eventualidade). Para os casos em que se deseja estipular o destino que o *token* deve seguir, ou seja, trabalhar de forma determinística, foram propostas algumas extensões às redes de Petri originais. Essas extensões são discutidas na próxima seção.

1.4. Extensões às Redes de Petri

Nesta seção são vistas algumas extensões propostas com a finalidade de aumentar a aplicação das redes de Petri. São discutidas as redes de Petri coloridas, hierárquica e temporizadas determinísticas.

- **Redes de Petri Coloridas**

As redes de Petri coloridas têm por objetivo reduzir o tamanho do modelo, permitindo que os *tokens* sejam individualizados, através de cores atribuídas a eles; assim, diferentes processos ou recursos podem ser representados em uma mesma rede. As cores não significam apenas cores ou padrões. Elas podem representar tipos de dados complexos, usando a nomenclatura de colorida apenas para referenciar a possibilidade de distinção entre os *tokens* [JEN90]. A figura 11 apresenta uma rede colorida, possuindo a representação original, onde são realmente utilizadas cores para os *tokens*. Nessa figura, os arcos são rotulados com cores (a, b, c).

No exemplo da figura 11, utiliza-se o modo mais elementar de redes coloridas, no qual se associa ao arco uma determinada cor, assim, o *token* se destinará ao arco cuja cor for idêntica a da marca. Observando-se essa figura, pode-se perceber que os *tokens* de P_0 não habilitarão a transição t_0 , pois o arco que liga P_0 a t_0 só aceita cores do tipo “a”, e o lugar P_0 só possui marcas do tipo “d”. Em contrapartida, P_1 possui marcas do tipo “a”, podendo habilitar a transição t_1 .

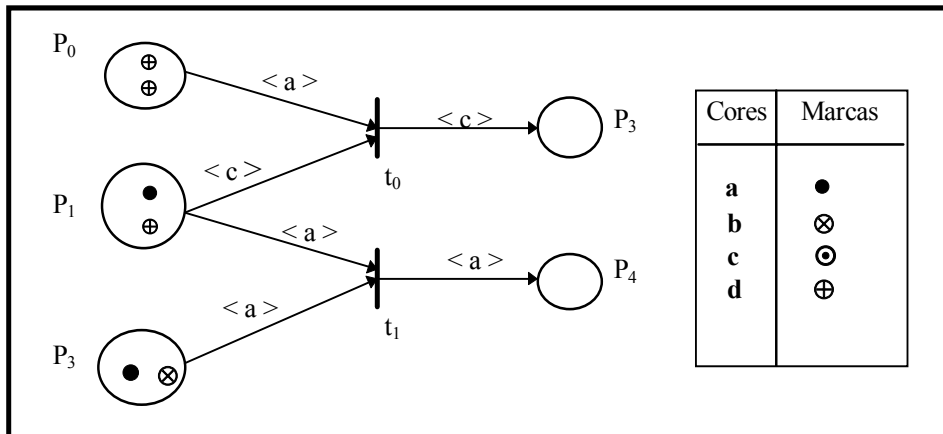


Figura 11. Rede de Petri Colorida.

Ainda que um tanto quanto rudimentar, a rede colorida original provê mecanismos que possibilitam efetuar uma escolha determinística. Esse poder de escolha já significa um grande avanço em direção a uma representação mais clara de um modelo, porém modificações (acréscimos) posteriores vieram dar maior adequação às redes coloridas, com relação à representação das escolhas não-determinísticas. A seguir, processa-se uma discussão a respeito de algumas melhorias adicionadas às redes coloridas, tornando-as mais poderosas. Para facilitar o uso da nomenclatura, faz-se referência às redes coloridas com as melhorias adicionais, chamando-as somente por redes de Petri coloridas.

As redes de Petri coloridas são compostas por três diferentes partes [MAC96]:

- estrutura,
- declarações,
- inscrições.

Estrutura é um grafo dirigido com dois tipos de vértices (lugares e transições). Os lugares são representados graficamente por círculos (ou por elipses) e as transições por retângulos. Essa representação herda a propriedade das redes coloridas originais de poder armazenar em cada lugar marcas de tipos diferentes, além de poder representar valores associados a tipos de dados mais complexos. **Declarações** compreendem a especificação dos conjuntos de cores e declarações de variáveis. As **inscrições** variam de acordo com o componente da rede. Os lugares possuem três tipos de inscrições: nomes, conjunto de cores e expressão de inicialização (marcação inicial). As transições têm dois tipos de inscrições: nomes e expressões guarda, e os arcos apenas um tipo de inscrição dado pela expressão. Como formas para distinguir as inscrições, nomes são escritos com letras normais, cores em itálico, expressões de inicialização sublinhadas e as expressões guarda são colocadas entre colchetes.

Nomes, quando associados a lugares, não têm significado formal, apenas facilitam a identificação. As expressões guarda associadas às transições são expressões *booleanas* que devem ser atendidas para que seja possível o disparo das transições [MAC96].

Para ilustrar a aplicação de redes de Petri coloridas, será mostrada uma situação clássica de geração de impasse: o jantar dos filósofos [TAN95]. Essa situação consiste de três filósofos que podem estar em três estados diferentes: comendo, pensando ou com fome. Os filósofos estão à volta de uma mesa, sendo que cada um deles tem à sua frente um garfo e um prato de comida. São, no entanto, necessários dois garfos para que um filósofo possa comer, ou seja, um filósofo precisa do seu garfo e do de seu vizinho. O impasse ocorrerá quando todos os filósofos pegarem o garfo da direita e aguardarem a liberação do garfo da esquerda. A figura 12 [MAC96] apresenta o jantar dos filósofos modelado em rede de Petri colorida.

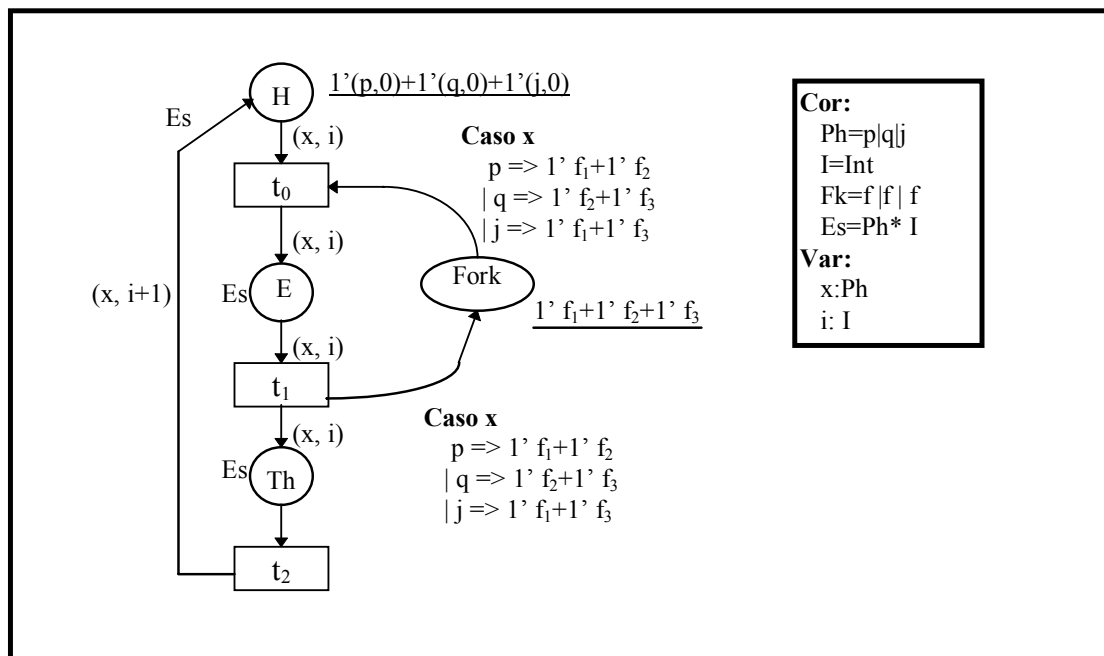


Figura 12. Jantar dos Filósofos Modelado em Redes Coloridas.

Na figura 12, os lugares representam os estados possíveis para os filósofos (H para “com fome”, E para “comendo” e Th para “pensando”) e os recursos do sistema (no caso, os garfos representados por Fork). A variável x indica o filósofo que irá passar para o estado “comendo” (E) e a variável i indica o número de iterações que já ocorreram. Na primeira iteração, o lugar H possui três marcas (marcação inicial) que estão sublinhadas. Dependendo da atribuição dada à variável x , uma das três expressões é avaliada no arco que liga o lugar Fork à transição t_0 . Assim, se, por exemplo, $x = p$, então a expressão $1' f_1 + 1' f_2$ é avaliada e apenas a marcação $1'(p, 0)$ do lugar H irá à transição t_0 , significando que apenas o filósofo p irá passar para o estado “comendo”. Desta forma, para cada atribuição de x (p , q ou j) haverá uma situação diferente, ou seja, uma marca diferente no lugar E

(estado “comendo”). A modelagem colorida, além de evitar o impasse (o que também poderia ser obtido através de uma rede não-determinística), ainda possibilita uma representação mais clara e concisa ao modelo.

Apenas para efeito de comparação, apresenta-se também a figura 13, ilustrando o mesmo problema da figura 12, o jantar dos filósofos. Só que na 13 [MAC96], a representação utilizada segue a metodologia das redes de Petri ordinárias. A comparação evidencia o poder de concisão e clareza que as redes coloridas proporcionam. Como é usada apenas para efeito ilustrativo, a rede ordinária não será explicada. Essa comparação é plenamente discutida em [MAC96].

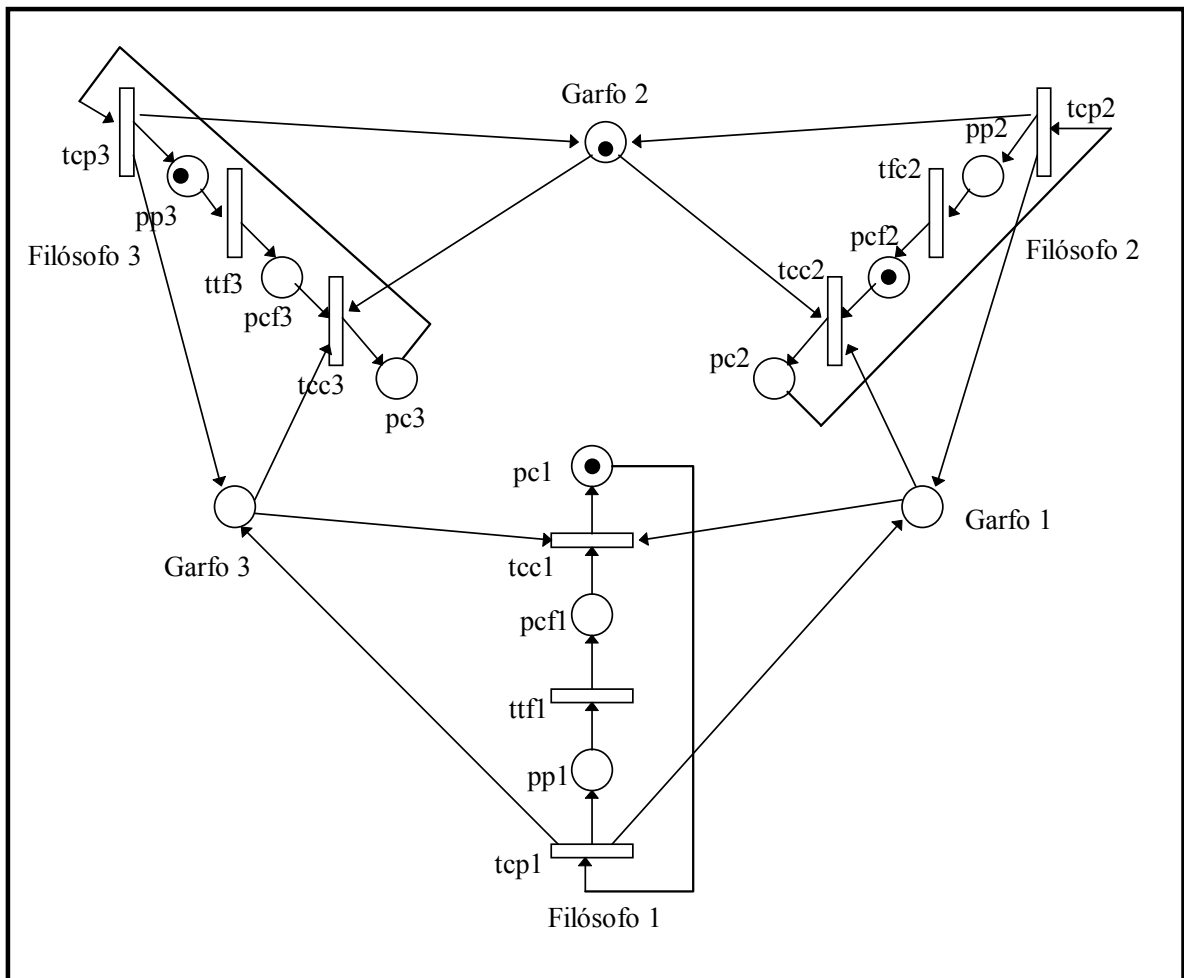


Figura 13. Jantar dos Filósofos em Rede Ordinária.

- **Redes Hierárquicas**

Um dos problemas apresentados nas redes de Petri originais é o fato que, à medida que o tamanho do sistema cresce, vai se tornando cada vez mais difícil manter a clareza do

modelo. Esse fato se deve, em grande parte, à falta de hierarquização dos modelos originais. Para amenizar essa limitação, foram criados mecanismos que possibilitam o agrupamento ou o refinamento de partes do modelo. Um dos problemas dessa abordagem é manter a consistência com os elementos vizinhos àqueles que sofrem um agrupamento. Na abordagem hierárquica, mostrada nesta seção, lugares e transições podem ser apresentados sob uma ótica de mais alto nível.

Na representação hierárquica, dois componentes são fundamentais para viabilizar uma representação em mais alto nível: a superpágina e a subpágina [DIT95]. A primeira representa um agrupamento de componentes (transições, lugares e arcos), visando gerar um modelo mais compacto e inteligível, como se fosse uma “caixa preta”. Já as subpáginas são o detalhamento de uma superpágina, de forma a esclarecer alguns detalhes omitidos na representação em alto nível. A figura 14 apresenta uma representação em alto nível para o exemplo do protocolo de comunicação visto na figura 10. O exemplo mostra a representação do transmissor e dos receptores 1 e 2 em forma de superpáginas.

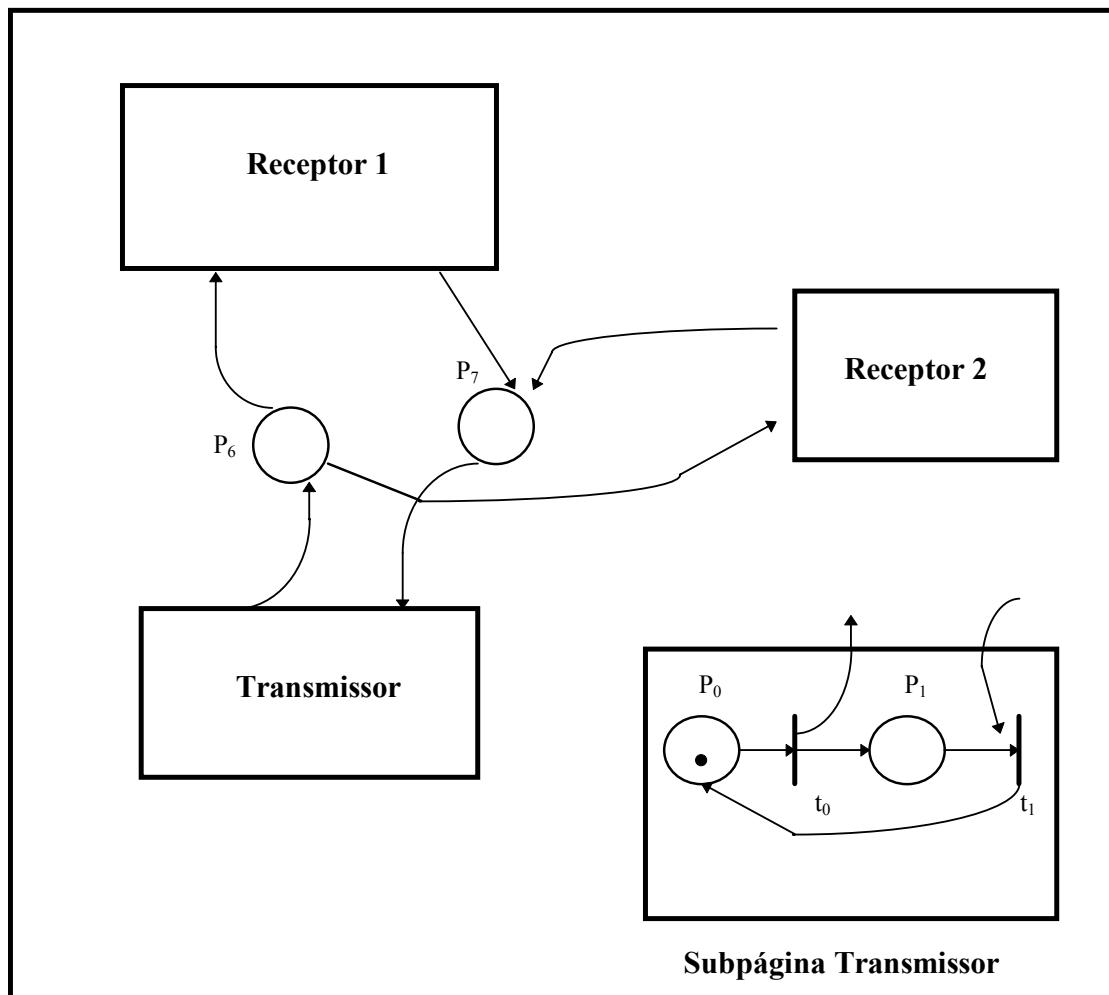


Figura 14. Hierarquia Utilizando Superpáginas.

- **Rede de Petri Temporizada Determinística**

Para suprir a necessidade de escolha determinística (assim como nas redes coloridas), foram desenvolvidas as redes de Petri temporizadas. Essas redes possibilitam a representação do comportamento dinâmico de sistemas que possuam atividades concorrentes, assíncronas e não-determinísticas, através da adição do conceito de tempo no modelo [COO83]. O tempo também pode ser usado de maneira probabilística, ou seja, o disparo de transições está associado a distribuições de probabilidade. Essas redes são denominadas redes de Petri estocásticas, pois seus comportamentos podem ser descritos por processos estocásticos.

A associação do tempo a componentes da rede pode se realizar de várias maneiras. As principais são [MAC96]:

- **O tempo associado aos lugares.** Assim, os *tokens* (após o disparo de uma transição) só estarão disponíveis para disparar uma nova transição após um determinado tempo que está associado ao lugar.
- **O tempo associado às marcas.** Nesse caso o tempo indica quando a marca estará disponível para disparar uma transição.
- **O tempo associado às transições.** O objetivo desta seção é enfatizar as redes de Petri temporizadas determinísticas com tempos associados às transições. Por uma questão prática, quando se fizer referência à rede de Petri temporizada, estará subentendido que está-se referindo às redes de Petri temporizadas determinísticas com tempos associados às transições.

Um exemplo de rede de Petri temporizada determinística é apresentado na figura 15. Nela, as transições t_1 e t_2 possuem tempos associados diferentes, o que significa que uma transição será disparada antes da outra. Supondo-se que $d_1 < d_2$, então o token chegará primeiro ao lugar P_1 . Assim, de maneira determinística, pode-se estabelecer a ordem em que os eventos devem ocorrer.

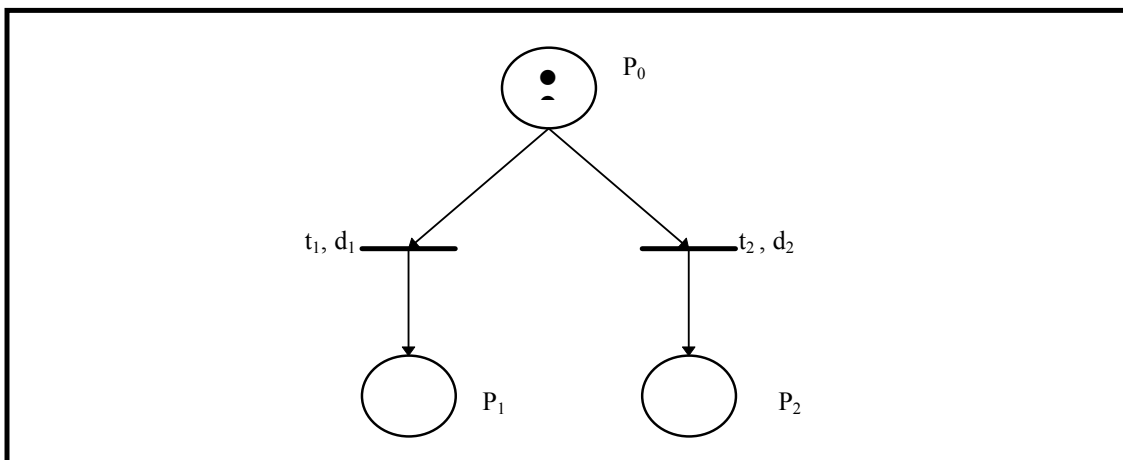


Figura 15. Rede de Petri Temporizada Determinística.

1.5. Análise das Redes de Petri

Há três grupos de métodos para se analisar as redes de Petri: análise baseada na árvore de cobertura, métodos baseados na equação fundamental das redes de Petri e as técnicas de redução [MUR89]. Esta seção enfoca a análise baseada na equação fundamental das redes de Petri (EFRP).

- **Análise da EFRP**

A equação fundamental, ou equação de estados, possibilita a análise da acessibilidade das marcações, bem como o número de vezes que cada transição deve ser disparada para que se obtenha a referida marcação [MUR77].

A Equação Fundamental das Redes de Petri é:

$$M'(p) = M_0(p) + C \cdot s, \forall p \in P$$

Onde s é o vetor característico cujos componentes s_i são naturais e representam o número de vezes que cada transição t_i foi disparada para obter-se a marcação $M'(p)$ a partir de $M_0(p)$, e C é a matriz de incidência, dada pela diferença entre as matrizes de pós e pré-condições ($C = O - I$). Assim, pode-se determinar se uma marcação M_k é acessível a partir de M_0 .

Observando-se a figura 16 [MAC96], pode-se analisar a acessibilidade da marcação $M' = (0,0,0,1,1,0,1)$ a partir da marcação inicial apresentada.

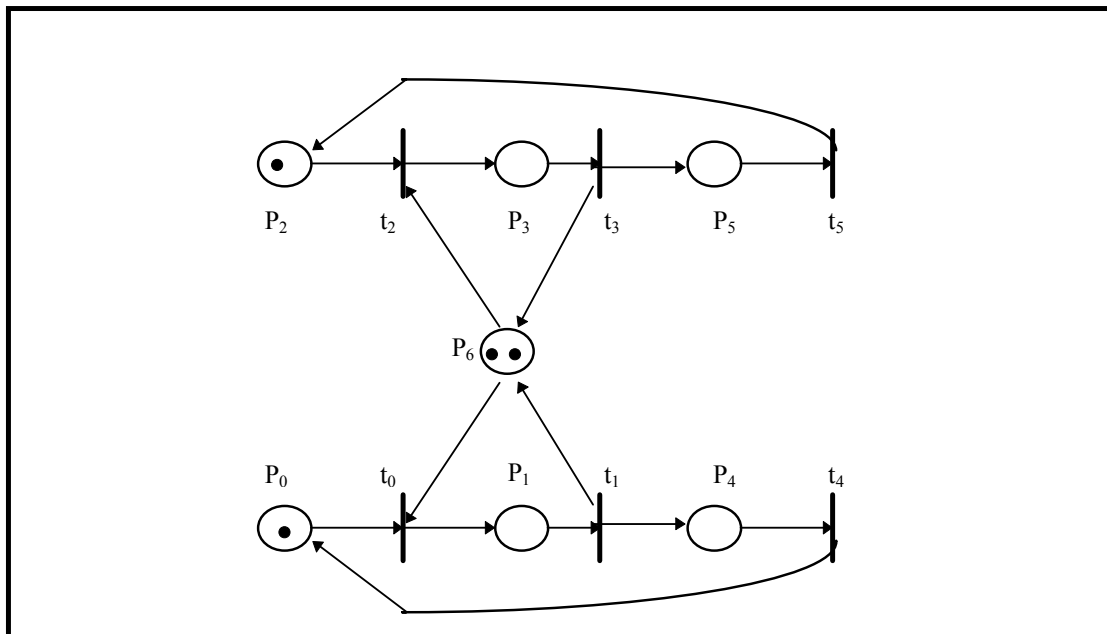


Figura 16. Acessibilidade de uma Marcação.

A partir da EFRP, tem-se o seguinte sistema matricial:

$$\begin{array}{c}
 M'(p) \quad M_0(p) \quad C \\
 \\
 \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) X \left(\begin{array}{c} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array} \right)
 \end{array}$$

A partir da solução do sistema matricial, podem-se determinar as relações entre os números de disparos de das transições. Por exemplo, tem-se que $s_0 = s_4 + 1$, isto é, o número de disparos de t_0 é uma unidade maior que o número de disparos da transição t_4 , e $s_0 = s_1$, indicando que o número de disparos de t_0 deve ser igual ao número de disparos de t_1 . Assim, a partir dos elementos de s , podem-se obter as seguintes relações:

$$s_0 = s_4 + 1, s_1 = s_0, s_2 = s_5 + 1, s_3 = s_2 - 1, s_4 = s_1 - 1, s_5 = s_3$$

Se considerar-se $s_0 = 1$ e $s_3 = 0$, tem-se como solução do problema $s = (1,1,1,0,0,0)$. Significando que com os disparos das transições t_0, t_1 e t_2 , obtém-se a marcação M' , a partir de M_0 , isto é, M' é alcançável a partir de M_0 . Vale observar que a marcação M' pode ser alcançada em outras relações de disparo de transições.

2. Redes de Petri Estocásticas

As redes de Petri, ao contrário das redes de filas, não foram desenvolvidas originalmente para prover avaliação de desempenho, apesar de toda a sua potencialidade para representar sistemas complexos, os quais naturalmente requerem cuidados a esse respeito. Esse panorama se modificou em 1982, quando M. K. Molloy (Molloy, 1982) apresentou as redes de Petri estocásticas (Stochastic Petri Nets - SPN) como uma técnica capaz de, além de especificar sistemas, também apresentar uma análise probabilística dos mesmos.

Molloy definiu que todas as transições em uma SPN eram temporizadas (timed), e que possuíam um retardo exponencialmente distribuído. Através dessa implicação, as SPN seriam isomórficas às cadeias de Markov, e assim poderiam prover medidas de desempenho.

Posteriormente, G. Chiola (Chiola et. al. 1993) apresentou uma melhoria às SPN, denominada Redes de Petri Estocásticas Generalizadas (Generalized Stochastic Petri Nets - GSPN), cuja diferença fundamental está em admitir que as transições também podem ser não-estocásticas, isto é, uma transição também pode ser imediata, como nas RP convencionais. Chiola definiu que as transições imediatas deveriam ter retardo de disparo igual a zero, e que somente as transições estocásticas tinham retardos associados diferentes de zero.

3. Bibliografia

- [CHI93] CHIOLA, G., MARSAN M. A., CONTE, G. Generalized Stochastic Petri Nets: A Definition at the Net Level and Its Implications. IEEE Transactions on Software Engineering, vol. 19, n. 2, p. 89-106, 1993.
- [COO83] COOLAHAN, J.E., ROUSSOPOULOS, N., *Timing Requirements for Time-Driven Systems Using Augmented Petri Nets*, IEEE Transaction on Software Engineering, 1983.
- [DIT95] DITTRICH, G., *Modeling of Complex Systems Using Hierarchical Petri Nets*, Codesign - Computer-Aided Software / Hardware Engineering, IEEE Press, 128-144, 1995.
- [JEN90] JENSEN, K., HUBER, P., SHAPIRO, R. M., *Hierarchies in Coloured Petri Nets*, Lectures Notes in Computer Science, Vol.483, 313-341, Springer-Verlag, 1990.
- [JEN90] JENSEN, K. Coloured Petri Nets: Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use. New York, v. 1, Springer-Verlag, 1992.
- [MAC96] MACIEL, P.R.M., LINS,R.D., CUNHA, P.R.F., **Introdução às Redes de Petri e Aplicações**, 10^a Escola de Computação, Campinas, Julho 1996.
- [MOL82] MOLLOY, M.K. Performance Evaluation Using Stochastic Petri Nets. IEEE Trans. Comput., v. C-31, n. 9, p. 913-17, 1982.
- [MUR77] MURATA, T., *State Equation, Contrallability, and Maximal of Petri Nets*, IEEE Trans. On Automatic Control, 1977.
- [MUR89] MURATA, T., *Petri Nets: Propriets, Analysis and Applications*, Proceeding of The IEEE, 1989.
- [PET81] PETERSON, J.L., *Petri Nets na Introduction*, Prentice Hall, Inc., 1981.
- [PET66] PETRI, C.A. Kommunikation mit Automaten. Schriften des IIM Nr. 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1962. English Translation: Technical Report RADC-TR-65-377, Griffiths Air Force Base, New York, v. 1, Suppl.1, 1966.

