LOCALIZAÇÃO POR ODOMETRIA PARA UM ROBÔ MÓVEL COM ACIONAMENTO DIFERENCIAL

Lembrando o modelo cinemático:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_D/2) & (r_E/2) \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega_D \\ \omega_E \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = {}^{\mathbf{V}}\mathbf{T_W}.\mathbf{W}$$

onde: $\mathbf{V} = [v \quad \omega]^T$ $\quad \mathbf{W} = [\omega_D \quad \omega_E]^T$ $\quad {}^{\mathbf{V}}\mathbf{T_W} = \begin{bmatrix} (r_D/2) & (r_E/2) \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{W} = ({}^{\mathbf{V}}\mathbf{T_W})^{-1}.\mathbf{V} = {}^{\mathbf{W}}\mathbf{T_V}.\mathbf{V} \qquad \text{onde, } {}^{\mathbf{W}}\mathbf{T_V} = ({}^{\mathbf{V}}\mathbf{T_W})^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{onde, } \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{q}T_V$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{q'} = {}^{\mathbf{q}}\mathbf{T_V}.\mathbf{V}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{q'} = {}^{\mathbf{q}}\mathbf{T_V}.{}^{\mathbf{V}}\mathbf{T_W}.\mathbf{W}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} (r_D/2) & (r_E/2) \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega_D \\ \omega_E \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_D/2)\cos\theta & (r_E/2)\cos\theta \\ (r_D/2)\operatorname{sen}\theta & (r_E/2)\operatorname{sen}\theta \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega_D \\ \omega_E \end{bmatrix}$$

Discretizando o modelo acima pelo método de Euler:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + T. \begin{bmatrix} (r_D/2)\cos\theta_k & (r_E/2)\cos\theta_k \\ (r_D/2)\text{sen}\theta_k & (r_E/2)\ \text{sen}\theta_k \\ (r_D/b) & -(r_E/b) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \omega_{Dk} \\ \omega_{Ek} \end{bmatrix}$$

Onde T é o período de amostragem. Assim:

$$X_{k+1} = X_k + (r_D.\omega_{Dk} + r_E.\omega_{Ek})T.\cos\theta_k/2$$

$$Y_{k+1} = Y_k + (r_D.\omega_{Dk}+ r_E.\omega_{Ek})T.\text{sen}\theta_k/2$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + (r_D.\omega_{Dk} - r_E.\omega_{Ek})T./b$$

As velocidades angulares das rodas pode ser medida no período T contando o número de pulsos do encoder da roda direita N_D e o número de pulsos do encoder da roda esquerda N_E:

$$\omega_{Dk} = (2\pi/T).(C_g/C_e).N_{Dk}$$

$$\omega_{Ek} = (2\pi/T).(C_g/C_e).N_{Ek}$$

onde C_g é a redução mecânica de velocidade introduzida pelas engrenagens e C_e é a resolução do encoder em pulsos por revolução. Assim:

$$X_{k+1} = X_k + (r_D.N_{Dk} + r_E.N_{Ek}).(\pi C_g/C_e).\cos\theta_k$$

$$Y_{k+1} = Y_k + (r_D.N_{Dk}+ r_E.N_{Ek}).(\pi C_g/C_e).\text{sen}\theta_k$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + (r_D.N_{Dk} - r_E.N_{Ek}).(2\pi C_g/C_e)./b$$

Este modelo, obtido integrando o modelo cinemático contínuo pelo método de integração de Euler, é aproximado, dado que o ângulo θ e velocidades das rodas ω_D e ω_D são assumidas constantes durante o período de amostragem T.

Assumindo que as velocidades das rodas ω_{Dk} e ω_{Dk} permaneçam constantes, mas considerando as variações do ângulo θ durante o período de amostragem T, um modelo mais preciso pode ser obtido integrando exatamente o modelo cinemático contínuo. Primeiro, integra-se a derivada de $\theta(t)$ para obter a função $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \theta(0) + \omega.t$$

onde $\omega = (r_D.\omega_D - r_E.\omega_E)/b$ é assumida constante ao longo intervalo de integração. Substituindo $\theta(t)$ nas expressões das derivadas contínuas de X(t) e Y(t) e integrando ao longo de um período de amostragem T, obtemos finalmente o modelo discreto:

$$\theta_{(k+1)} = \theta_k + \omega_k.T$$
$$X_{(k+1)} = X_k + (v_k/\omega_k)[sen(\theta_k+\omega_k.T) - sen(\theta_k)]$$
$$Y_{(k+1)} = Y_k - (v_k/\omega_k)[cos(\theta_k+\omega_k.T) - cos(\theta_k)]$$

Onde $v = (r_D.\omega_D + r_E.\omega_E)/2$

Substituindo v_k e ω_k pela sua expressão em função das velocidades das rodas ω_{Dk} e ω_{Dk} e expressando estas em função das medições de pulsos do encoder durante o período de amostragem T, temos:

$$v_k = (r_D.N_{Dk} + r_E.N_{Ek}).(\pi/T).(C_g/C_e)$$
$$\omega_k = (r_D.N_{Dk} - r_E.N_{Ek}).(2\pi/b.T).(C_g/C_e)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \omega_k.T$$
$$X_{k+1} = X_k + (v_k/\omega_k)[sen(\theta_{k+1}) - sen(\theta_k)]$$
$$Y_{k+1} = Y_k - (v_k/\omega_k)[cos(\theta_{k+1}) - cos(\theta_k)]$$

Percebe-se que o modelo é singular para $\omega_k = 0$, ou seja, só é válido para trajetórias curvilíneas.

Erros de Odometria

- Na odometria, a localização atual do robô é obtida integrando medições de pequenos deslocamentos a cada período de amostragem.
- Erros nestas medições tendem a se acumular, degradando progressivamente a precisão da localização calculada.
- Odometria deve ser usada em conjunto com algum método de localização absoluta, para corrigir periodicamente os erros de localização, caso contrário, estes crescerão sem limite.
- Por envolver pequeno esforço computacional, a odometria pode ser executada em uma alta taxa de amostragem e costuma ser usada entre medições obtidas por métodos de localização absoluta, computacionalmente mais custosos.

Erros Sistemáticos:

- Imprecisões no modelo cinemático (valores nominais dos raios das rodas e do comprimento do eixo diferentes dos reais).
- Imprecisões na mecânica do robô (rodas desalinhadas, com folgas ou de tamanhos diferentes).
- Erros de quantização (resolução finita dos encoders, taxa de amostragem finita).

Erros Não Sistemáticos:

- Irregularidades no chão (devido a piso não plano ou presença de pequenos objetos).
- Derrapagem lateral ou deslizamentos das rodas (devido a curvas rápidas, chão muito liso, perda de contato, colisão com obstáculos, travamento de roda de apoio, etc.)