

ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO DE UM ROBÔ

Dados:

A = robô.

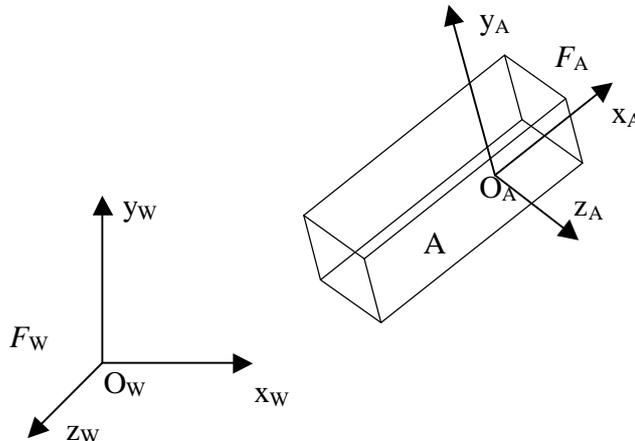
W = espaço de trabalho do robô (subconjunto de \mathbf{R}^2 ou \mathbf{R}^3).

F_A = Referencial fixo em A .

F_W = Referencial fixo em W .

Definições:

- Uma configuração q de A é uma especificação da localização (posição e orientação = pose) de F_A em relação a F_W .
- O espaço C m -dimensional de todas as possíveis configurações de A é denominado "Espaço de Configuração" $\Rightarrow q \in C \forall q$.
- Uma única configuração arbitrária é a configuração de referência, denotada por O .
- $A(q)$ = subconjunto de W ocupado por A na configuração q .



Transformação $T(q)$ expressa a configuração do robô em termos de rotações e translações a partir da configuração de referência:

$$A(q) = T(q).A(O)$$

$T(q)$ é uma composição de uma rotação e uma translação:

$$T(q) = \text{Trans}(q) \bullet \text{Rot}(q) : W \rightarrow W$$

Seja N a dimensão de W ($N = 2$ ou 3), a configuração q pode ser representada de modo equivalente pelo par $({}^0R_A, {}^0P_A)$, onde:

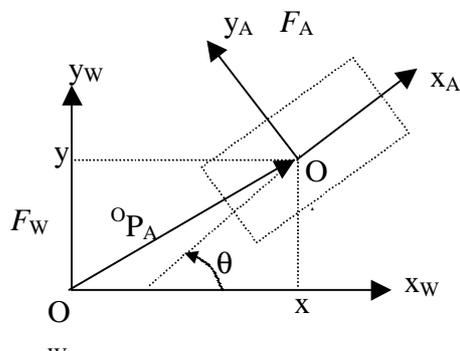
- ${}^0P_A = {}^0P_A(q)$ = vetor de posição $N \times 1$ de O_A em relação a F_W .
 $\Rightarrow {}^0P_A \in \mathbf{R}^N$
- ${}^0R_A = {}^0R_A(q)$ = matriz de orientação $N \times N$ de F_A em relação a F_W .
 $\Rightarrow {}^0R_A \in \text{SO}(N)$ (Special Orthogonal) grupo de matrizes $\mathbf{R}^{N \times N}$.
 \Rightarrow Colunas e linhas de 0R_A ortonormais, $\det({}^0R_A) = 1$.

\Rightarrow Qualquer ponto $a(q)$ pode ser descrito por:

$$a(q) = {}^0R_A \cdot a(O) + {}^0P_A$$

\Rightarrow Se F_A e F_W coincidem, ${}^0P_A = 0$ e ${}^0R_A =$ matriz identidade.

Exemplo: seja $N = 2$.



$$q = [x \ y \ \theta]^T$$

$${}^0R_A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Observações:

- Colunas de 0R_A = eixos de F_A expressos em F_W .
- Colunas de 0R_A são vetores unitários e ortogonais.
- $\text{Det}({}^0R_A) = 1$.

INCORPORAÇÃO DE C NO ESPAÇO AMBIENTE

O espaço de configuração C pode ser representado de modo equivalente como o subconjunto $M_C = \mathbf{R}^N \times \text{SO}(N) \subset \mathbf{R}^M$, onde:

- \mathbf{R}^M = "Espaço Euclidiano Ambiente" de dimensão $M = N + N^2$.
- M_C é considerado uma "Incorporação" de C em \mathbf{R}^M .

De modo geral:

- cada configuração q pode ser representada de modo equivalente por um ponto u de M_C :

$$u = (x_1, \dots, x_N, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{NN}) = (u_1, u_2, \dots, u_M)$$

- M_C é definido por um conjunto de $N \cdot (N+1)/2$ restrições:

$$h_k(u_1, \dots, u_M) = 0, \quad \text{onde } k = 1, \dots, N \cdot (N+1)/2.$$

Para $N = 2$, $M_C \subset \mathbf{R}^6$:

- A configuração q é representada por $(x, y, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}) \in M_C$.
- M_C é definido pelas quatro restrições (${}^O R_A$ ortonormal e de determinante unitário) :

$$h_1(x, y, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}) = (r_{11})^2 + (r_{21})^2 - 1 = 0$$

$$h_2(x, y, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}) = (r_{12})^2 + (r_{22})^2 - 1 = 0$$

$$h_3(x, y, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}) = r_{11} \cdot r_{12} + r_{21} \cdot r_{22} = 0$$

$$h_4(x, y, r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}) = r_{11} \cdot r_{22} - r_{21} \cdot r_{12} - 1 = 0$$

Para $N = 3$, $M_C \subset \mathbf{R}^{12}$:

- A configuração q é representada por $(x, y, r_{11}, r_{12}, \dots, r_{33}) \in M_C$.
- M_C é definido por seis restrições em ${}^O R_A$ que definem que a mesma é ortonormal e de determinante unitário.

PARAMETRIZAÇÕES

Parametrizações de SO(2):

$${}^0R_A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

a) Representar a orientação através de um ângulo θ :

Exemplo: ângulo entre os eixos x de F_W e F_A .

- Como todos os ângulos $\theta + 2.k.\pi$, com k inteiro, representam a mesma orientação, este não é um mapeamento um-para-um.
- Solução: restringir θ ao intervalo aberto $(0 < \theta < 2.\pi)$.
- Muitos métodos requerem que as restrições sejam expressas de forma algébrica, o que não ocorre neste método, pois envolve expressões em $\text{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$.

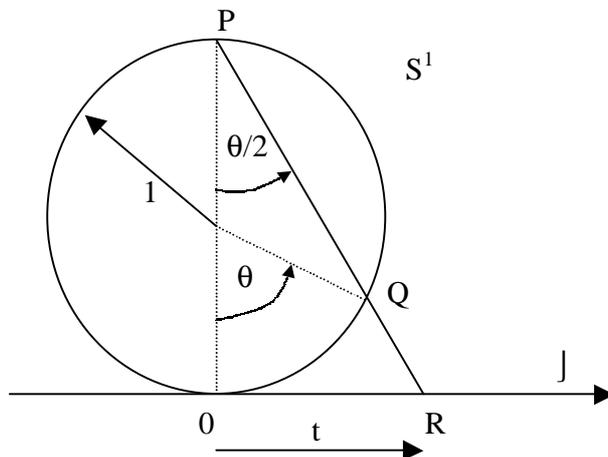
b) Projeção Estereográfica:

$$t = 2.\tan(\theta/2)$$

$$\text{fazendo } t/2 = w \Rightarrow$$

$$\cos(\theta) = (1-w^2)/(1+w^2)$$

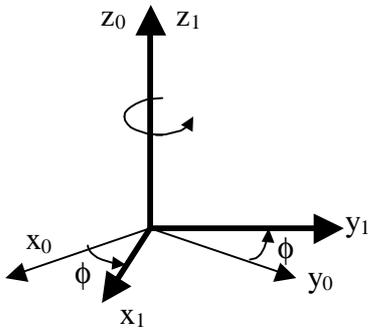
$$\text{sen}(\theta) = (2.w)/(1+w^2)$$



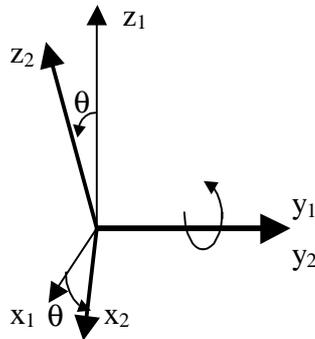
- Permite representar as restrições de forma algébrica.
- Mapéia todo ponto Q do círculo unitário S^1 (exceto o ponto P) em um ponto R correspondente no eixo real.

Parametrizações de SO(3):

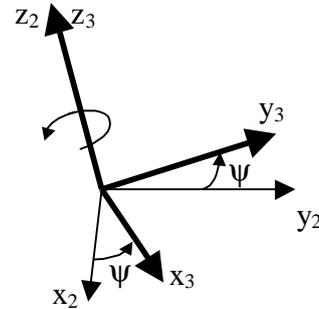
a) Ângulos de Euler:



i) ϕ em torno de z_0 .



ii) θ em torno de y_1 .



iii) ψ em torno de z_2 .

$${}^0R_A = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} =$$

$${}^0R_A = \begin{bmatrix} [\cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi] & [-\cos\phi\cos\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi] & [\cos\phi\sin\theta] \\ [\sin\phi\cos\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi] & [-\sin\phi\cos\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi] & [\sin\phi\sin\theta] \\ [-\sin\theta\cos\psi] & [\sin\theta\sin\psi] & [\cos\theta] \end{bmatrix}$$

- $\phi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$
- $\theta = \text{atan2}((r_{31}^2 + r_{32}^2)^{1/2}, r_{33})$
- $\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$

onde, $\text{atan2}(y,x) = \text{argumento de } x+i.y$

- Não é um mapeamento um-para-um \Rightarrow restringir os ângulos aos intervalos $(0 \leq \phi < 2.\pi)$, $(0 \leq \theta < 2.\pi)$, $(0 \leq \psi < 2.\pi)$.
- Quando $\theta = 0$, temos uma singularidade.
- Não se pode representar as restrições no movimento de forma algébrica.

CAMINHOS

- Caminho no Espaço de Configuração: Mapeamento contínuo entre q_{ini} (configuração inicial) e q_{fin} (configuração final), $\tau: [0,1] \rightarrow C$, com $\tau(0) = q_{ini}$ e $\tau(1) = q_{fin}$.
- C é conexo \rightarrow existe um caminho entre quaisquer duas configurações q_{ini} e q_{fin} .

Exemplo:

Considere as transformações $T(q_{ini})$ e $T(q_{fin})$ correspondentes às configurações q_{ini} e q_{fin} . Seja $Rot(\theta)$ uma transformação de rotação de um ângulo θ em torno de um eixo e $Trans(\delta)$ uma transformação de translação δ ao longo de um eixo, o mapeamento contínuo $\tau : s \in [0, 1] \rightarrow C$, com

$$T(\tau(s)) = Trans(s.\delta) \bullet Rot(s.\theta) \bullet T(q_{ini})$$

é um caminho entre q_{ini} e q_{fin} .

Observação \rightarrow a transformação homogênea ${}^O T_A(q)$, descrição equivalente da configuração q , é uma ferramenta matemática útil para representar de maneira compacta e integrada a orientação ${}^O R_A$ e a posição ${}^O P_A$ de um robô A em relação a um sistema de referências F_W (correspondente à configuração de referência O):

$${}^O T_A(q) = \left[\begin{array}{c|c} {}^O R_A & {}^O P_A \\ \hline \dots\dots\dots & \\ \hline 0_N & 1 \end{array} \right]$$

onde, 0_N é um vetor $1 \times N$ cujos elementos são todos nulos.

- Objeto em Vôo livre: aquele para o qual, na ausência de obstáculos, qualquer caminho é realizável \Rightarrow não sujeito a restrições cinemáticas ou dinâmicas.

Reparametrização e Diferenciabilidade de Caminhos:

- Considere um caminho $\tau : s \in [0, 1] \rightarrow \tau(s) \in C$, a função bijetora $f : s \in [0,1] \rightarrow f(s) \in [0, 1]$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ é chamada de Reparametrização de τ .
- O caminho $\tau' : s \in [0, 1] \rightarrow \tau'(s) = \tau(f(s)) \in C$ produz a mesma curva geométrica mas com velocidade de traçado diferente.

Exemplo:

Seja $L = \tau(1) - \tau(0)$ = comprimento do caminho; $l(s) = \tau(s) - \tau(0)$ = comprimento percorrido entre $\tau(0)$ e $\tau(s)$; então,

$l(s)/L$ = comprimento normalizado é uma reparametrização de τ .

- Se τ é diferenciável, exceto para um número finito de pontos, pode ser reparametrizado para o caminho τ' diferenciável.
- Caminhos diferenciáveis para todo s são ditos de **classe C^1** .
- Caminhos diferenciáveis para todo s , exceto para um número finito de valores de s , são ditos de **classe C^1 por partes**.
- Planificadores devem gerar somente caminhos destas classes.
- Caminhos devem ser reparametrizados de modo a serem de classe C^1 ou de classe C^1 por partes.
- Caminhos classe C^1 geralmente são difíceis de obter.
- Qualquer caminho τ em C é homotópico a um caminho suave que pode ser aproximado tanto quanto desejado a τ .
- A maior parte dos métodos de planejamento de caminhos gera caminhos classe C^1 por partes.

Métricas:

- Métricas são medidas de distância entre duas configurações q_1 e q_2 em C .
- São usadas para guiar o processo de geração de caminhos. Exemplo: buscar o menor caminho, medir distância entre robô e obstáculos, etc.

a) Distância euclidiana em \mathbf{R}^M (espaço ambiente):

$$\text{i) } d(q_1, q_2) = \|u_1 - u_2\| \quad \text{onde } q_1, q_2 \text{ mapeiam em } u_1, u_2 \in \mathbf{R}^M.$$

b) Distância euclidiana em W (espaço de trabalho):

$$\text{ii) } d(q_1, q_2) = \max_{a \in A} \|a(q_1) - a(q_2)\|$$

$$\text{iii) } d(q_1, q_2) = \sum_{i \in [1, n]} \|a_i(q_1) - a_i(q_2)\| \quad \text{onde } a_i \in A$$

$$\text{iv) } d(q_1, q_2) = \max\{d_h(A(q_1), A(q_2)), d_h(A(q_2), A(q_1))\} \\ = \text{distância de Hausdorff, onde:}$$

$$d_h(U, V) = \max_{u \in U} \min_{v \in V} \|u - v\|$$

c) Geodésica:

Dada uma curva $\gamma(s)$ em C , seu vetor tangente é $d\gamma(s)/ds$. O comprimento da curva é dado por:

$$L(\gamma(s)) = \int_0^1 \|d\gamma(s)/ds\| ds$$

$$\Rightarrow \text{v) } d(q_1, q_2) = \inf_{\gamma} \{L(\gamma)\}$$

OBSTÁCULOS

Obstáculo B no Espaço de Trabalho W:

W está povoado de obstáculos B_i ($i = 1, \dots, q$), onde $B_i =$ região fechada, mas não necessariamente limitada de J^N . Dado $B \subset W$:

- Interior de $B = \text{int}(B) = \{p / p \in W \text{ e } p \text{ é ponto interior de } B\}$, onde p é ponto interior de $B \Leftrightarrow B$ é vizinhança de p .
- Limite de $B = \partial B = \{p / p \in W \text{ e nem } B \text{ nem } W \setminus B \text{ são vizinhanças de } p\}$
- Clausura de $B = \text{cl}(B) = \{p / p \in W \text{ e } p \text{ não é ponto exterior de } B\}$, onde p é ponto exterior de $B \Leftrightarrow W \setminus B$ é vizinhança de B .

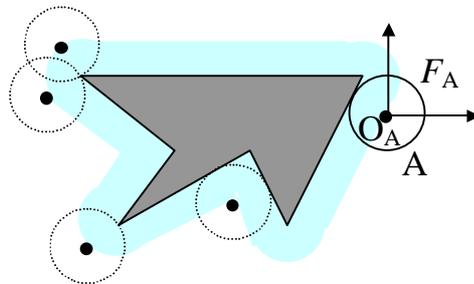
Por definição, $\partial B = \text{cl}(B) \setminus \text{int}(B)$.

C-Obstáculo CB no Espaço de Configuração C:

Um obstáculo B_i mapeia em um C-obstáculo CB_i no espaço de configuração definido como:

$$CB_i = \{q \in C / A(q) \cap B_i \neq \emptyset\}$$

Exemplo:

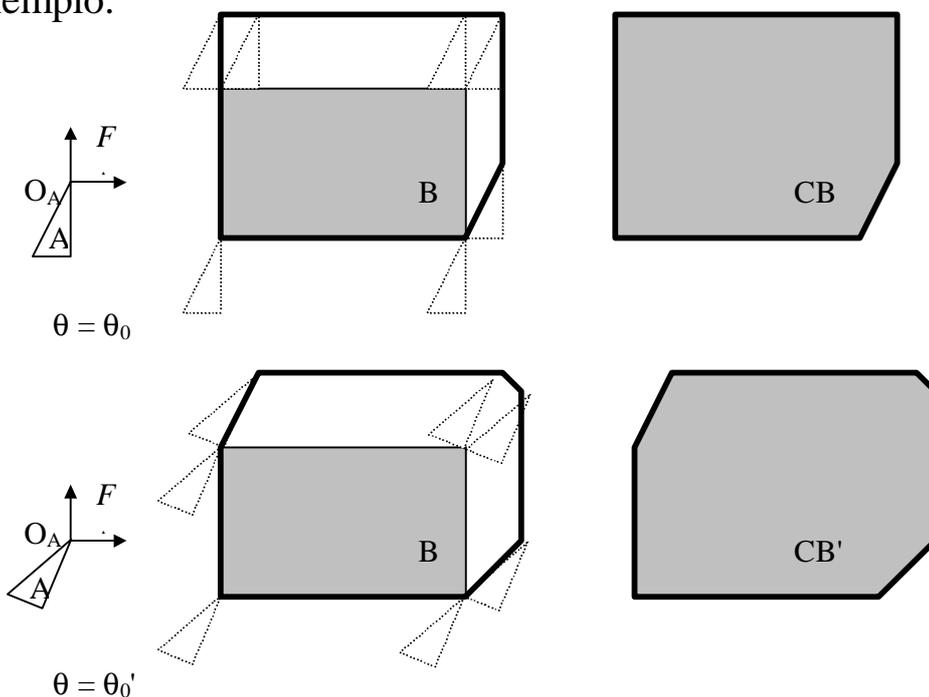


Para o robô $A_\theta(P)$ = robô numa orientação fixa θ e na posição P , dado um obstáculo B , O C-obstáculo CB_θ é calculado como:

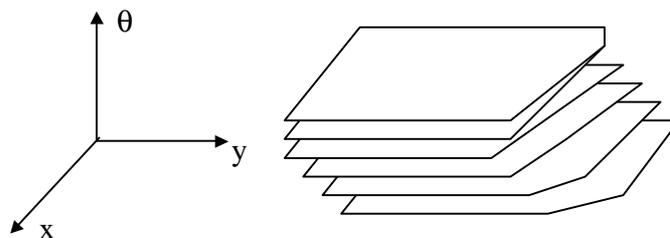
$$CB_\theta = B \ominus A_\theta(0) = \{x \in W / \exists b \in B, \exists a_0 \in A_\theta(0): x = b - a_0\}$$

onde \ominus denota o operador de Minkowski para diferença de conjuntos.

Exemplo:



Quando a orientação do robô é variável, com configuração dada por $q = (x, y, \theta)$, CB é subconjunto de $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi]$ constituído por infinitas seções transversais, cada uma consistindo de um CB_θ bidimensional diferente.



ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO LIVRE

⇒ Espaço de Configuração livre: $C_L = C \setminus \cup (CB_i)$.

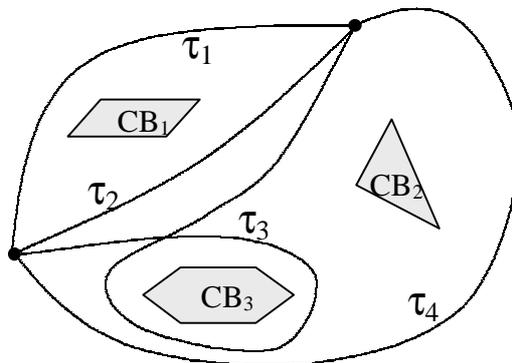
⇒ Configuração livre: qualquer configuração q , tal que $q \in C_L$.

⇒ Caminho livre (entre q_{ini} e q_{fin}):

Mapeamento contínuo $\tau : [0, 1] \rightarrow C_L$, $\tau(0) = q_{ini}$ $\tau(1) = q_{fin}$.

- Achar um caminho livre entre duas configurações implica em verificar se pertencem à mesma componente conexa de C_L .
- Dois caminhos livres τ e τ' são topologicamente equivalentes se são homotópicos em C_L .

Exemplo: para $C = \mathbf{R}^2$, cada componente compacta e conexa da região de C-Obstáculos induz uma infinidade enumerável de classes de caminhos topologicamente equivalentes.



⇒ Caminho semi-livre (entre q_{ini} e q_{fin}):

mapeamento contínuo $\tau : [0, 1] \rightarrow cl(C_L)$, $\tau(0) = q_{ini}$ $\tau(1) = q_{fin}$.

- Se existe caminho semi-livre entre duas configurações \Rightarrow existe caminho em C_L , exceto em configurações isoladas.
- Se qualquer configuração em $cl(C_L)$ possui uma vizinhança homeomórfica com uma bola aberta de \mathbf{R}^m , então, dado um caminho semi-livre τ' , um caminho livre τ pode ser obtido por uma deformação arbitrariamente pequena de τ' .

Espaço de Contato:

$$C_{\text{cont}} = \{q \in C / A(q) \cap \cup B_i \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(A(q)) \cap \cup \text{int}(B_i) = \emptyset\}.$$

\Rightarrow Espaço de Válido:

$$C_{\text{val}} = C_L \cup C_{\text{cont}}$$

Verifica-se que:

- $\partial(\cup B_i) \subseteq C_{\text{cont}}$
- $\partial C_L \subseteq C_{\text{cont}}$
- $\text{cl}(C_L) \subseteq C_{\text{val}}$
- $\partial C_L \subseteq \partial C_{\text{val}}$

\Rightarrow Caminho de Contato entre q_{ini} e $q_{\text{fin}} \in C_{\text{cont}}$:

Mapeamento contínuo $\tau : [0, 1] \rightarrow C_{\text{cont}}$, $\tau(0) = q_{\text{ini}}$ $\tau(1) = q_{\text{fin}}$.

\Rightarrow Caminho Válido entre q_{ini} e $q_{\text{fin}} \in C_{\text{val}}$:

Mapeamento contínuo $\tau : [0, 1] \rightarrow C_{\text{val}}$, $\tau(0) = q_{\text{ini}}$ $\tau(1) = q_{\text{fin}}$.

- Se A e B são conexos, e A objeto em voo livre e existe caminho válido entre duas configurações de contato \Rightarrow existe caminho de contato entre as duas.

OBSTÁCULOS EM ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO

- Um Obstáculo $B \in W$ mapeia em C-Obstáculo $CB \in C$, tal que $CB = \{q \in C / A(q) \cap B \neq \emptyset\}$.

Modelos algébricos:

- Permitem descrever objetos com precisão arbitrária usando um número razoavelmente pequeno de parâmetros.
- Caso particular: representação poligonal/poliédrica.
- Permitem usar ferramentas matemáticas padronizadas, técnicas de cálculo exato e métodos de decisão algébrica, apropriados para diversos métodos de planejamento.
- Em algumas aplicações, podem ser obtidos diretamente a partir de sistemas CAD.

Caso – W Poligonal:

- Região poligonal convexa em \mathbf{R}^2 = subconjunto de \mathbf{R}^2 obtido pela interseção de um número finito de semiplanos fechados.
- Região poligonal P = União de regiões poligonais convexas.
- Polígono = Região poligonal homeomórfica com o disco unitário fechado.

- Se A e B_i 's são polígonos \Rightarrow CB representado como:
 - a) **Predicado:** $CB(q) =$ verdadeiro se $q \in CB$.
 - b) **Forma explícita:** em termo de faces (curvas), eixos e vértices, incluindo as suas relações de adjacência.

- **Eixo E_i :** segmento de reta máximo no limite de P , que não intersecta o resto do limite de P exceto nos pontos extremos (vértices). Se inclui os vértices é **fechado**, se não, é **aberto**.

- **Linha Suporte L_i ,** contém o eixo E_i : $h_i(x, y) = 0$.

- **Semiplano externo h_i^+ de E_i :** $h_i(x, y) \geq 0$
- **Semiplano interno h_i^- de E_i :** $h_i(x, y) \leq 0$

- **Normal externa de E_i :** vetor unitário normal a E_i apontando para o interior de h_i^+ , V_i .
- **Normal interna de E_i :** vetor unitário normal a E_i apontando para o interior de h_i^- , $-V_i$.

Representação de um Polígono:

- Lista de vértices enumerados em sentido anti-horário. Cada vértice representado pelas suas coordenadas.
- Conjunto de inequações: $\cap h_i^-$.

A complexidade de uma região poligonal é definida como o número de seus eixos e vértices.

Tipos de Contatos:

Representação do robô:

- Lista de n_A vértices a_i , com $i = 1, \dots, n_A$, enumerados em sentido anti-horário, aplicando aritmética módulo n_A , ($a_{n_A+1} = a_1$).
- Eixo conectando a_i e $a_{i+1} = \mathbf{E}_i^A$.
- Normal externa ao eixo $\mathbf{E}_i^A = \mathbf{V}_i^A(\mathbf{q})$, função da orientação.

Representação do Obstáculo:

- Lista de n_B vértices b_j , com $j = 1, \dots, n_B$, enumerados em sentido anti-horário, aplicando aritmética módulo n_B . ($b_{n_B+1} = b_1$).
- Eixo conectando b_j e $b_{j+1} = \mathbf{E}_j^B$.
- Normal externa ao eixo $\mathbf{E}_j^B = \mathbf{V}_j^B$.

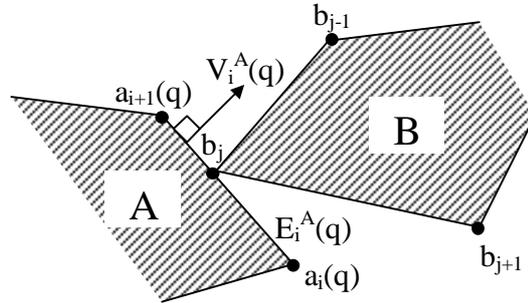
Quando \mathbf{A} e \mathbf{B} estão em contato:

$$A(q) \cap B \neq \emptyset \text{ e } \text{int}(A(q)) \cap \text{int}(B) = \emptyset.$$

Existem dois tipos de contato:

- Contato **tipo A**: quando um eixo \mathbf{E}_i^A de \mathbf{A} contém um vértice b_j de \mathbf{B} .
- Contato **tipo B**: quando um eixo \mathbf{E}_j^B de \mathbf{B} contém um vértice a_i de \mathbf{A} .
- Quando $A(q) \cap B$ contém um vértice de \mathbf{A} e um vértice de \mathbf{B} , o contato é de ambos os tipos: **tipo A** e **tipo B**.

Contato tipo A: Eixo E_i^A de **A** contém um vértice b_j de **B**.



O contato entre E_i^A e b_j , sem superposição de **A** e **B**, é possível para uma certa faixa de orientações de **A**, tal que:

$$\begin{aligned} V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) &\geq 0 \\ V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) &\geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Condição de Aplicação de Contato tipo A entre E_i^A e b_j (depende somente da orientação):

$$APL_{ij}^A(q) = [V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0] \wedge [V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0]$$

Deslocamento em contato tipo A \Rightarrow a configuração do robô está restrita a uma superfície em **C** (**C-Superfície tipo A**):

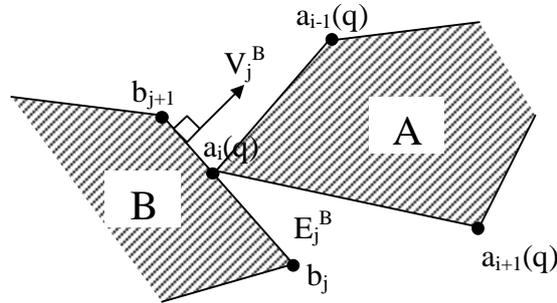
$$f_{ij}^A(q) = V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) = 0$$

A C-superfície tipo A separa **C** em dois semi-espacos, com **CB** contido completamente no semi-espaco $f_{ij}^A \leq 0$.

C-Restrição tipo A:

$$RESTR_{ij}^A(q) = APL_{ij}^A(q) \Rightarrow [f_{ij}^A \leq 0]$$

Contato tipo B: Eixo E_j^B de B contém um vértice a_i de A .



O contato entre E_j^B e a_i , sem superposição de A e B , é possível para uma certa faixa de orientações de A , tal que:

$$\begin{aligned} (a_{i-1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B &\geq 0 \\ (a_{i+1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B &\geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow Condição de Aplicação de Contato tipo B entre E_j^B e a_i (depende somente da orientação):

$$APL_{ij}^B(q) = [(a_{i-1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0] \wedge [(a_{i+1}(q) - a_j(q)) \cdot V_j^B \geq 0]$$

Deslocamento em contato tipo B \Rightarrow a configuração do robô está restrita a uma superfície em C (**C-Superfície tipo B**):

$$f_{ij}^B(q) = V_j^B \cdot (a_i(q) - b_j) = 0$$

A C-superfície tipo B separa C em dois semi-espacos, com CB contido completamente no semi-espaço $f_{ij}^B \leq 0$.

C-Restrição tipo B:

$$RESTR_{ij}^B(q) = APL_{ij}^B(q) \Rightarrow [f_{ij}^B \leq 0]$$

Representação de C-Obstáculos Através de C-Restrições:

Lema: Dois polígonos convexos não se intersectam se e somente se um deles contém um eixo \mathbf{E} tal que o outro polígono está contido no semiplano externo aberto de \mathbf{E} .

Teorema: Dados dois polígonos convexos \mathbf{A} e \mathbf{B} , O C-Obstáculo $CB = \{q \in C / A(q) \cap B \neq \emptyset\}$ é tal que,

$$q \in CB \Leftrightarrow CB(q) = (\bigwedge \text{RESTR}_{ij}^A(q)) \wedge (\bigwedge \text{RESTR}_{ij}^B(q))$$

Assim, avaliando sucessivamente as C-Restrições, pode-se verificar se a configuração q está ou não no C-Obstáculo:

- Se todas são verdadeiras, $q \in CB$.
- Se ao menos uma é falsa, $q \notin CB$. Assim: $q \in C_L \Leftrightarrow \neg CB(q)$
- No pior caso, o número de C-restrições a serem avaliadas (e, conseqüentemente, a complexidade computacional) é $2.n_A.n_B$.

A configuração q está no limite de CB se e somente se:

- $\exists i, j$ tais que $APL_{ij}^A(q)$ (ou $APL_{ij}^B(q)$) é verdadeira e $f_{ij}^A(q) = 0$ (ou $f_{ij}^B(q) = 0$),
- $\forall i', j'$ tais que $APL_{i'j'}^A(q)$ é verdadeira, $f_{i'j'}^A(q) \leq 0$.
- $\forall i', j'$ tais que $APL_{i'j'}^B(q)$ é verdadeira, $f_{i'j'}^B(q) \leq 0$.

Se A e B são não convexos, podem ser decompostos em um conjunto de polígonos convexos: $A = \cup A_k$ e $B = \cup B_l$. Definindo:

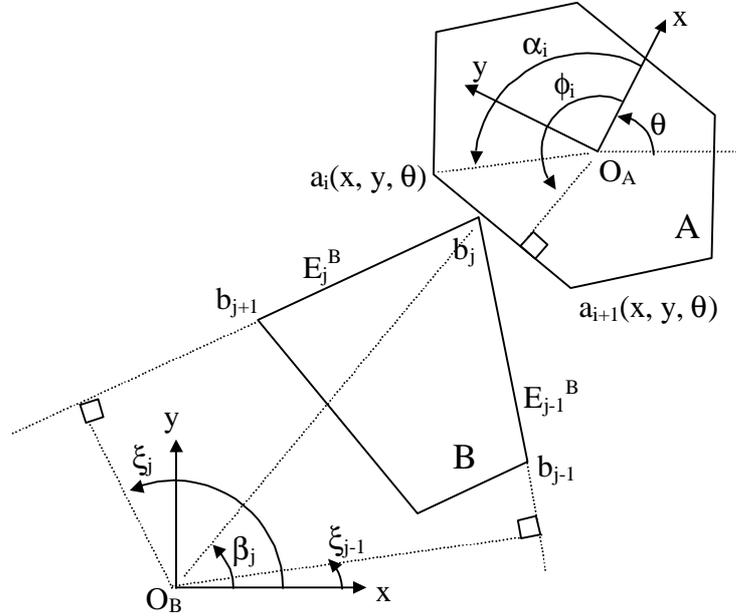
$$CB_{kl} = \{q \in C / A_k(q) \cap B_l \neq \emptyset\}$$

$$\Rightarrow CB = \cup CB_{kl}$$

$$\Rightarrow CB(q) = \bigvee CB_{kl}(q)$$

Assim, o Espaço de Configuração Livre é: $q \in C_L \Leftrightarrow \neg CB(q)$.

Parametrização das C-Restrições: $q = (x, y, \theta)$



Contato tipo A:

$$V_i^A = (\cos(\phi_i + \theta), \sin(\phi_i + \theta))$$

$$V_j^B = (\cos \xi_j, \sin \xi_j)$$

$$a_i(x, y, \theta) = (x + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta), y + \|a_i\| \cdot \sin(\alpha_i + \theta))$$

$$b_j = (\|b_j\| \cdot \cos(\beta_j), \|b_j\| \cdot \sin(\beta_j))$$

- Condição de Aplicabilidade:

$$APL_{ij}^A(q) = [V_i^A(q) \cdot (b_{j-1} - b_j) \geq 0] \wedge [V_i^A(q) \cdot (b_{j+1} - b_j) \geq 0]$$

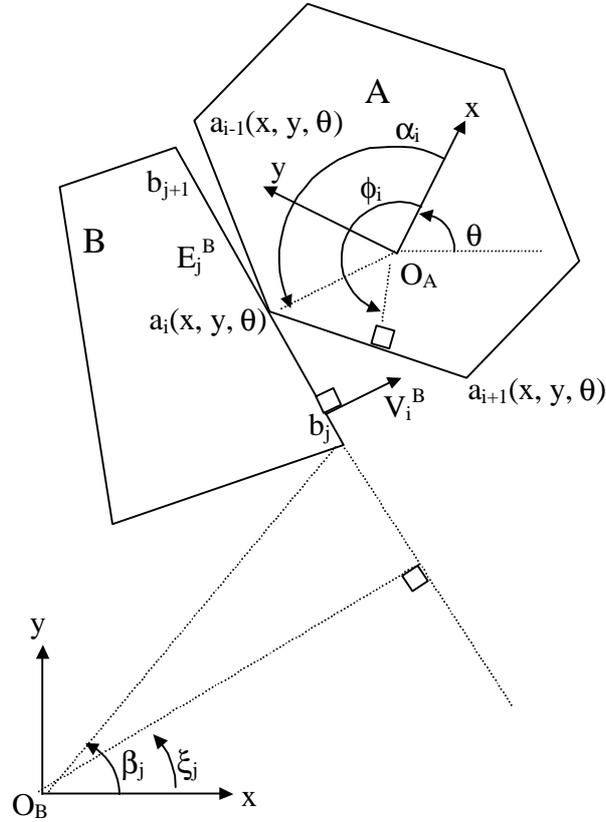
$$\Rightarrow APL_{ij}^A(q) = \theta \in [\xi_{j-1} - \phi_i - \pi, \xi_j - \phi_i + \pi] \pmod{2\pi}$$

- Inequação do C-Obstáculo:

$$f_{ij}^A(q) = V_i^A \cdot (b_j - a_i(q)) \leq 0$$

$$\Rightarrow -x \cdot \cos(\phi_i + \theta) - y \cdot \sin(\phi_i + \theta) + \|b_j\| \cdot \cos(\phi_i + \theta - \beta_j) - \|a_i\| \cdot \cos(\phi_i - \alpha_i) \leq 0$$

Contato tipo B:



$$V_i^A = (\cos(\phi_i + \theta), \sin(\phi_i + \theta))$$

$$V_j^B = (\cos \xi_j, \sin \xi_j)$$

$$a_i(x, y, \theta) = (x + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta), y + \|a_i\| \cdot \sin(\alpha_i + \theta))$$

$$b_j = (\|b_j\| \cdot \cos(\beta_j), \|b_j\| \cdot \sin(\beta_j))$$

- Condição de Aplicabilidade:

$$APL_{ij}^B(q) = [(a_{i-1}(x, y, \theta) - a_i(x, y, \theta)) \cdot V_j^B \geq 0] \wedge [(a_{i+1}(x, y, \theta) - a_i(x, y, \theta)) \cdot V_j^B \geq 0]$$

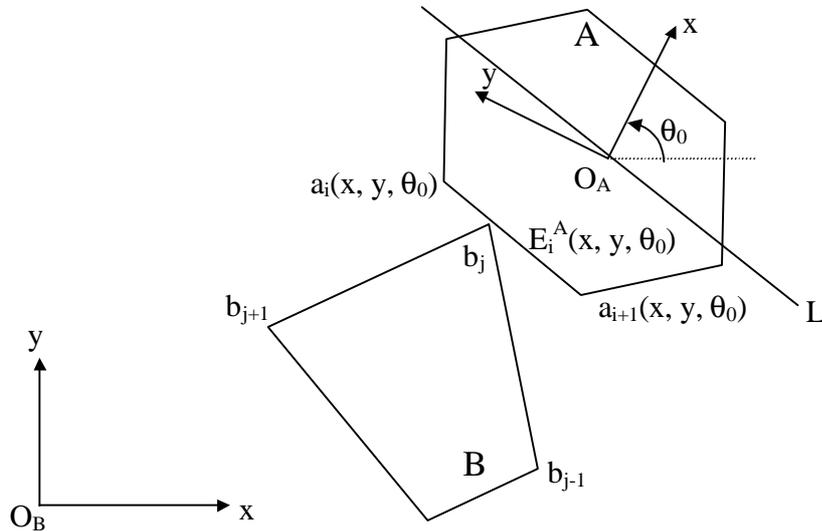
$$\Rightarrow APL_{ij}^B(q) = \theta \in [\xi_j - \phi_i - \pi, \xi_j - \phi_{i-1} - \pi] \pmod{2\pi}$$

- Inequação do C-Obstáculo:

$$f_{ij}^B(q) = V_j^B \cdot (a_i(x, y, \theta) - b_j) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos(\xi_j) + y \cdot \sin(\xi_j) + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta - \xi_j) - \|b_j\| \cdot \cos(\beta_j - \xi_j) \leq 0$$

Interpretação Geométrica do Contato tipo A:



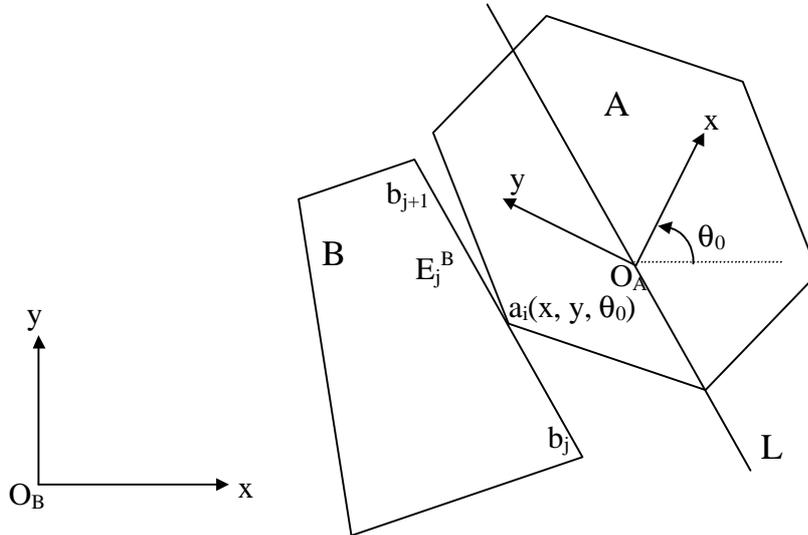
Um deslocamento em contato tipo A, mantendo uma orientação constante θ_0 , corresponde à equação de uma reta L em \mathbf{R}^2 paralela ao eixo $E_i^A(x, y, \theta_0)$:

$$f_{ij}^A(x, y, \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow -x \cdot \cos(\phi_i + \theta_0) - y \cdot \sin(\phi_i + \theta_0) + \|b_j\| \cdot \cos(\phi_i + \theta_0 - \beta_j) - \|a_i\| \cdot \cos(\phi_i - \alpha_i) = 0$$

- Quando o robô gira um ângulo $d\theta$, a reta L gira o mesmo ângulo tendo o vértice b_j como centro de rotação.
- As faces do C-Obstáculo correspondentes a deslocamentos em contato tipo A estão contidas em C-Superfícies helicoidais (C-Superfícies tipo A).

Interpretação Geométrica do Contato tipo B:



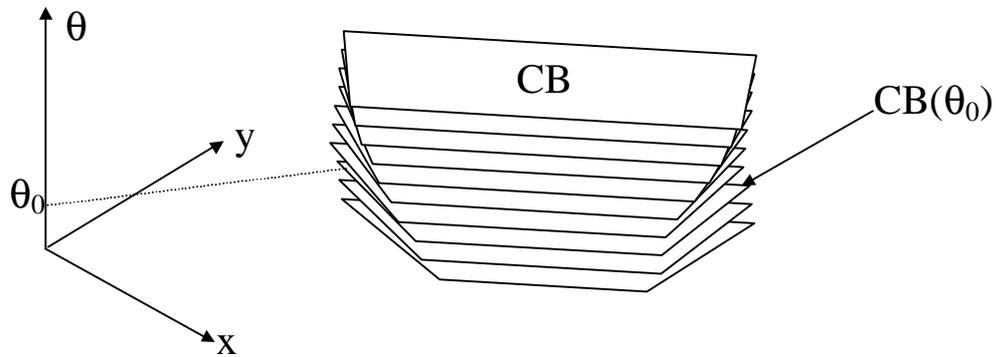
Um deslocamento em contato tipo B, mantendo uma orientação constante θ_0 , corresponde à equação de uma reta L em \mathbf{R}^2 paralela ao eixo E_j^B :

$$f_{ij}^B(x, y, \theta_0) = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot \cos(\xi_j) + y \cdot \sin(\xi_j) + \|a_i\| \cdot \cos(\alpha_i + \theta_0 - \xi_j) - \|b_j\| \cdot \cos(\beta_j - \xi_j) = 0$$

- Quando o robô gira um ângulo $d\theta$, a reta L sofre uma translação, modificando a sua distância em relação ao eixo E_j^B , mas mantendo-se paralela ao mesmo.
- As faces do C-Obstáculo correspondentes a deslocamentos em contato tipo B estão contidas em C-Superfícies curvas em uma única dimensão (C-Superfícies tipo B), semelhantes à superfície de um tobogã.

C-Obstáculo em $\mathbf{R}^2 \times [0, 2\pi)$ para A e B polígonos convexos:



- Para cada valor θ_0 de θ , a seção transversal de CB correspondente é um polígono convexo que representa o C-obstáculo $CB(\theta_0)$ em \mathbf{R}^2 quando A se desloca com orientação fixa θ_0 .
- Os limites de CB são as faces, (retalhos de C-Superfícies), correspondentes a contatos do tipo A ou do tipo B.
- Contato tipo A \Rightarrow Face = retalho de helicóide (gerada por uma reta em rotação e translação, paralela ao plano xy).
- Contato tipo B \Rightarrow Face = retalho de superfície curva em uma única dimensão (gerada por uma reta em translação, paralela ao plano xy).

A Seção transversal $CB(\theta_0)$ é a região de \mathbf{R}^2 definida por:

$$(x, y) \in CB(\theta_0) \Leftrightarrow (\bigwedge \text{RESTR}_{ij}^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0)) \wedge (\bigwedge \text{RESTR}_{ij}^B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0))$$

- $CB(\theta_0)$ é a interseção de um número finito de semi-planos fechados limitados por retas: $f_{ij}^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0) = 0$ ou $f_{ij}^B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0) = 0$.
- A distância euclidiana de um ponto $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a estas retas é:

$$|f_{ij}^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0)| = |V_i^A(\theta_0) \cdot (b_j - a_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0))|$$

$$|f_{ij}^B(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0)| = |V_j^B \cdot (a_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta_0) - b_j)|$$

Estes valores podem ser usados para calcular a distância da configuração (x, y, θ_0) ao C-Obstáculo no subespaço $\theta = \theta_0$.

Representação dos Limites de CB (Caso Translacional):

Para uma orientação fixa θ_0 , com $q_0 = (0,0,\theta_0)$:

- Se $APL_{ij}^A(\theta_0)$ é verdadeira, $(b_j - a_i(q_0))$ e $(b_j - a_{i+1}(q_0))$ são vértices de $CB(\theta_0)$.
- Se $APL_{ij}^B(\theta_0)$ é verdadeira, $(b_j - a_i(q_0))$ e $(b_{j+1} - a_i(q_0))$ são vértices de $CB(\theta_0)$.

Procedimento para construir $CB(\theta_0)$:

1. Fixar os vetores normais $-V_i^A$ (com $i=1,\dots,n_A$) e V_j^B (com $j=1,\dots,n_B$) no círculo unitário S^1 .
2. Varrer o círculo unitário em sentido anti-horário e verificar a condição de aplicabilidade de acordo com os Vetores Normais:
 - $APL_{ij}^A(\theta_0)$ é verdadeira se $-V_i^A$ está entre V_{j-1}^B e V_j^B .
 - $APL_{ij}^B(\theta_0)$ é verdadeira se V_j^B está entre $-V_{i-1}^A$ e $-V_i^A$.
3. De acordo com a condição de aplicabilidade, criar os $n_A + n_B$ vértices de $CB(\theta_0)$:
 - Se $-V_i^A$ está entre V_{j-1}^B e V_j^B , criar o vértice $(b_j - a_i(q_0))$.
 - Se V_j^B está entre $-V_{i-1}^A$ e $-V_i^A$, criar o vértice $(b_{j+1} - a_i(q_0))$.

Observações:

- Para uma orientação crítica θ_0 , tal que $E_i^A(q_0)$ se desloca paralelamente em contato com E_j^B , temos $-V_i^A = V_j^B$. Os pontos $(b_j - a_i)$, (b_{j+1}, a_i) , $(b_j - a_{i+1})$ e (b_{j+1}, a_{i+1}) são co-lineares. Os pontos (b_{j+1}, a_i) e $(b_j - a_{i+1})$ não são vértices de $CB(\theta_0)$.
- A complexidade do algoritmo é de ordem $O(n_A + n_B)$.
- Para A e B não convexos, decompor em componentes convexas A_i e B_j . Computar CB_{ij} para cada (A_i, B_j) . $CB = \cup CB_{ij}$.

Exemplo:

