

## 5. CONTROLE DE MANIPULADORES

Neste capítulo abordamos o problema de controle de robôs manipuladores, desde a especificação de uma tarefa, até a determinação dos esforços que devem ser aplicados pelos atuadores de junta de modo a executá-la. O problema de controle de posição envolve várias etapas. Inicialmente, o operador do robô especifica um ou mais objetivos a serem alcançados. Neste processo, pode ser necessário especificar algumas características adicionais: o tempo de percurso para atingir cada objetivo, o tipo de trajetória a ser percorrida, etc. Uma segunda etapa envolve o cálculo de uma trajetória entre a posição atual e o próximo objetivo ser alcançado. Esta etapa tem por finalidade gerar referências intermediárias para os controladores de juntas, de modo a que o manipulador se movimente de modo suave até o seu objetivo, evitando esforços excessivos nos atuadores, assim como vibrações ou movimentos que possam comprometer a estrutura mecânica do robô.

Caso a trajetória for gerada em espaço cartesiano, torna-se necessário realizar o controle cinemático do manipulador, ou seja, mapear as referências especificadas em espaço cartesiano para referências correspondentes em espaço de juntas. Um problema que aparece neste processo de mapeamento é a existência de configurações singulares, nas quais é impossível inverter a matriz jacobiana. Para contornar estas singularidades, é necessário estabelecer algum tipo de medida da distância às mesmas. Elipsóides de Manipulabilidade são utilizados para medir a capacidade que o robô possui de manipular objetos em direções especificadas. Como quanto mais próximo de uma singularidade, menor a capacidade de manipulação do robô, estes elipsóides também fornecem uma medida da distância a configurações singulares. Quando o manipulador possui mais juntas do que aquelas necessárias para realizar a tarefa em espaço cartesiano, o mesmo é chamado de manipulador redundante e seu controle cinemático envolve a inversão de uma matriz jacobiana não quadrada. Nestes casos, técnicas baseadas em matriz pseudoinvertida podem ser utilizadas de modo a resolver o problema de cinemática inversa e utilizar os graus de liberdade excedentes para realizar tarefas adicionais à tarefa de posicionamento.

A etapa seguinte no processo de controle de um robô manipulador consiste no controle dinâmico do mesmo, no qual definem-se os esforços que devem ser aplicados pelos atuadores, de modo a que as posições e velocidades de junta medidas através de sensores de posição e velocidade convirjam para a trajetória desejada. Quando a ferramenta interage com um objeto, torna-se necessário controlar o esforço exercido pela mesma. Para isto, é necessário implementar um controlador que incorpore a realimentação de medições fornecidas por sensores de força e conjugado instalados no punho do robô manipulador. Em certas aplicações, pode ser necessário controlar, em umas direções, o esforço exercido pela garra e, em outras direções, a posição da mesma. Nestes casos, técnicas de controle híbrido de esforço e posição devem ser utilizadas.

### 5.1. Geração de Trajetória:

#### O problema de geração de trajetória:

A descrição de uma tarefa a ser executada pelo robô numa linguagem de programação é normalmente feita através de comandos que especificam em alto nível os objetivos a serem alcançados. Um comando típico especifica o ponto alvo e o tempo de percurso para alcançá-lo, como por exemplo: MOVE ARM TO X with duration = 4.3\*second. O

controlador do robô se encarregara de interpretar estes comandos de modo a aplicar ao longo do tempo os esforços de atuadores necessários para alcançar o objetivo especificado. O manipulador deve movimentar-se suavemente, da posição atual à posição desejada, de modo a não gerar acelerações muito altas que possam forçar os atuadores nem movimentos bruscos que possam danificar a estrutura mecânica do manipulador. Desta maneira, o controlador do robô deve computar uma trajetória suave que sirva de referência a ser seguida pelos servo controladores das juntas. Aqui faremos distinção entre a trajetória propriamente dita e o caminho percorrido pelo robô. Definimos Caminho como a descrição geométrica do conjunto dos pontos percorridos pelo manipulador da posição atual à posição alvo. É dado por uma curva contínua, com o maior número possível de derivadas contínuas. A Trajétória é um caminho sujeito a restrições temporais. A geração de trajetória envolve a descrição temporal da posição, velocidade e aceleração para cada grau de liberdade do manipulador (seja em espaço cartesiano ou em espaço de junta). A geração de trajetória pode ser realizada previamente à sua execução (geração *off-line*), ou em tempo real, a medida em que é executada. Neste último caso, cada novo ponto deve ser gerado a intervalos da ordem de milissegundos ou dezenas de milissegundos.

Na Especificação da trajetória devem ser levadas em conta três tipos de restrições:

- Restrições espaciais: pontos (posição + orientação) do caminho. O ponto inicial e o ponto final do caminho. A presença de obstáculos pode requerer a especificação de eventuais pontos intermediários.
- Restrições temporais: duração de cada trecho da trajetória.
- Restrições mecânicas: a trajetória deve ser suave (maior número possível de derivadas contínuas). Para ser implementável, a trajetória gerada deve corresponder a pontos dentro do espaço de trabalho do manipulador.

### **Geração em espaço de juntas:**

Neste esquema, os pontos extremos são especificados no espaço cartesiano e convertidos por cinemática inversa em pontos no espaço de juntas. Os pontos intermediários da trajetória são obtidos por interpolação no espaço de juntas. Este esquema é independente para cada junta e não apresenta problemas com singularidades. Por outro lado, nada se pode garantir sobre o posicionamento do manipulador no espaço cartesiano para os pontos interpolados da trajetória. Métodos de geração em espaço de juntas fazem uso de vários tipos de perfis de interpolação: polinômios de ordem variada, função linear com limites parabólicos, etc.

### **Interpolação usando polinômio de 5ª ordem:**

$$\theta(t) = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + a_3.t^3 + a_4.t^4 + a_5.t^5$$

$$\Rightarrow \quad d\theta(t)/dt = a_1 + 2.a_2.t + 3.a_3.t^2 + 4.a_4.t^3 + 5.a_5.t^4$$

$$\Rightarrow \quad d^2\theta(t)/dt^2 = 2.a_2 + 6.a_3.t + 12.a_4.t^2 + 20.a_5.t^3$$

sujeito às restrições:

Duração:  $T$

Posição de junta inicial:  $\theta(0) = \theta_0$

Posição de junta final:  $\theta(T) = \theta_f$

Velocidade de junta inicial:  $d\theta(0)/dt = \theta_0'$

Velocidade de junta final:  $d\theta(T)/dt = \theta_f'$

Aceleração de junta inicial:  $d^2\theta(0)/dt^2 = \theta_0''$

Aceleração de junta final:  $d^2\theta(T)/dt^2 = \theta_f''$

Nas condições de contorno, temos:

$$\theta_0 = a_0$$

$$\theta_0' = a_1$$

$$\theta_0'' = 2 \cdot a_2$$

$$\theta_f = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 \cdot T^3 + a_4 \cdot T^4 + a_5 \cdot T^5$$

$$\theta_f' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot T + 3 \cdot a_3 \cdot T^2 + 4 \cdot a_4 \cdot T^3 + 5 \cdot a_5 \cdot T^4$$

$$\theta_f'' = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot T + 12 \cdot a_4 \cdot T^2 + 20 \cdot a_5 \cdot T^3$$

A solução deste sistema de seis equações lineares fornece os coeficientes do polinômio interpolador:

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = \theta_0'$$

$$a_2 = \theta_0''/2$$

$$a_3 = [20(\theta_f - \theta_0) - (8\theta_f' + 12\theta_0')T + (\theta_f'' - 12\theta_0'')T^2]/(2 \cdot T^3)$$

$$a_4 = [-30(\theta_f - \theta_0) + (14\theta_f' + 16\theta_0')T + (-2\theta_f'' + 3\theta_0'')T^2]/(2 \cdot T^4)$$

$$a_5 = [12(\theta_f - \theta_0) - (6\theta_f' + 6\theta_0')T + (\theta_f'' - \theta_0'')T^2]/(2 \cdot T^5)$$

Observe que os seis coeficientes a serem determinados nos permitem impor as seis condições de contorno, ou seja, as posições, velocidades e acelerações iniciais e finais. Desta forma, obtemos uma trajetória contínua e suave entre o ponto inicial e final, a qual pode ser concatenada com um novo trecho de trajetória, sem descontinuidades na aceleração.

### **Geração de Trajetória em Espaço de Cartesiano:**

Quando uma trajetória é gerada em espaço de juntas, a predição do movimento correspondente da ferramenta em espaço cartesiano envolve o cômputo da cinemática direta do manipulador. Existem certas aplicações, como, por exemplo, soldagem, nas quais é necessário especificar uma trajetória para a ferramenta em espaço cartesiano. Nestes casos, esquemas de geração de trajetória em espaço cartesiano são mais adequados. Assim como no esquema baseado em espaço de juntas, na geração de trajetória em espaço cartesiano, os pontos extremos da mesma são especificados no espaço cartesiano. Por outro lado, ao contrário da geração em espaço de juntas, os pontos intermediários são obtidos diretamente em espaço cartesiano, por interpolação entre os pontos extremos. A trajetória resultante é convertida ponto a ponto, por cinemática inversa, em uma trajetória no espaço de juntas. A geração em espaço

cartesiano apresenta a vantagem de que a trajetória pode ser completamente definida em espaço cartesiano. Com isto, garante-se que, se uma tarefa exige que a ferramenta se movimente ao longo de uma dada curva, a trajetória gerada corresponderá exatamente à curva especificada. Uma reta será efetivamente uma reta; um arco de círculo será exatamente um arco de círculo. Por outro lado, a cinemática inversa deve ser computada em tempo real para cada ponto gerado. Como consequência, outro problema decorrente desta metodologia é que é necessário ter um certo controle sobre a existência de solução do problema da cinemática inversa para cada ponto gerado, pois, a princípio, pontos intermediários interpolados podem não estar no espaço de trabalho, ou cair numa singularidade. Da mesma forma, a interpolação da matriz de rotação pode gerar uma matriz intermediária inválida (não ortogonal, ou com colunas não unitárias).

### **Interpolação da posição da ferramenta:**

Considere os vetores  $P_0$  e  $P_f$  que especificam, respectivamente a posição inicial e final da ferramenta em relação à base. Uma trajetória entre estes dois pontos pode ser gerada, por exemplo, aplicando a cada elemento  $P_i$  (onde  $i = x, y, z.$ ) do vetor de posição um método interpolação polinomial semelhante ao utilizado para interpolação em espaço de juntas. Para isto, é necessário especificar as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Duração: } T \\ P_i(0) &= P_{i0} \\ dP_i(0)/dt &= P_{i0}' \\ d^2P_i(0)/dt^2 &= P_{i0}'' \\ P_i(T) &= P_{if} \\ dP_i(T)/dt &= P_{if}' \\ d^2P_i(T)/dt^2 &= P_{if}'' \end{aligned}$$

### **Interpolação da orientação da ferramenta:**

No caso de geração de uma trajetória que descreva a evolução da orientação da ferramenta entre uma localização inicial e uma localização final, inicialmente, deve-se escolher uma representação adequada para a orientação. A partir desta representação, é fácil aplicar um procedimento de interpolação análogo ao dos casos anteriores. Por exemplo, representando a orientação por uma matriz de rotação  $R$ , considere:

$R_0$  = orientação inicial da ferramenta em relação à base.

$R_f$  = orientação final da ferramenta em relação à base.

Uma trajetória entre  $R_0$  e  $R_f$  pode ser gerada aplicando a cada elemento da matriz de rotação um método interpolação por polinômio de 5ª ordem, de acordo com as seguintes condições de contorno, (onde  $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \text{Duração: } T \\ R_{ij}(0) &= R_{ij0} \\ dR_{ij}(0)/dt &= R_{ij0}' \\ d^2R_{ij}(0)/dt^2 &= R_{ij0}'' \\ R_{ij}(T) &= R_{ijf} \\ dR_{ij}(T)/dt &= R_{ijf}' \\ d^2R_{ij}(T)/dt^2 &= R_{ijf}'' \end{aligned}$$

O método acima apresenta um problema: pode-se gerar uma matriz de rotação que não seja ortogonal, o que pode vir a complicar o procedimento de cinemática inversa que o sucede.

Método baseado na representação ângulo-Eixo equivalente:

Neste método, a orientação da ferramenta em relação à sua orientação inicial é especificada através da quádrupla  $(K_x, K_y, K_z, \theta)$ , onde  $\theta$  representa o ângulo de rotação em torno do vetor unitário  $K = [K_x \ K_y \ K_z]^T$ , tal que, quando  $\theta = 0$ , a ferramenta está na sua orientação inicial, quando  $\theta = \theta_f$ , a ferramenta está na orientação final especificada. Desta maneira, a geração das orientações intermediárias pode ser realizada interpolando apenas uma variável, o ângulo  $\theta$ . Esta interpolação pode ser feita, por exemplo, utilizando o esquema baseado em polinômio de quinta ordem apresentado anteriormente, usando as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \text{Duração: } T \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ d\theta(0)/dt &= \theta_0' \\ d^2\theta(0)/dt^2 &= \theta_0'' \\ \theta(T) &= \theta_f \\ d\theta(T)/dt &= \theta_f' \\ d^2\theta(T)/dt^2 &= \theta_f'' \end{aligned}$$

## 5.2. Controle Cinemático:

O controle cinemático é necessário quando a trajetória é gerada em espaço cartesiano. O controle cinemático consiste na determinação da trajetória em espaço de juntas correspondente à trajetória gerada. Para tanto, é necessário realizar o mapeamento de posição, velocidade e aceleração para espaço de juntas, o que envolve a inversão da matriz jacobiana. Dois problemas adicionais surgem neste processo de inversão. O primeiro deles ocorre quando o robô se aproxima de uma configuração singular, onde o jacobiano inverso torna-se mal condicionado numericamente, sendo não inversível na singularidade. Neste caso, torna-se necessário medir a proximidade do braço a configurações singulares. Medidas adequadas desta distância podem ser extraídas do elipsóide de manipulabilidade do robô. O segundo problema na inversão do jacobiano ocorre quando o manipulador é redundante, ou seja, quando o número de juntas é maior do que o número de graus de liberdade a serem controlados em espaço cartesiano. Neste caso, o jacobiano não é uma matriz quadrada e técnicas baseadas em matriz pseudo-inversa são comumente utilizadas para resolver o problema. Quando o manipulador é redundante, existem infinitas soluções possíveis para o problema de controle cinemático. Neste caso, pode-se adotar algum critério de otimização para escolher uma solução dentre as infinitas possíveis. Visto de outra forma, a introdução de restrições adicionais, como por exemplo uma ou mais tarefas adicionais a serem realizadas, além da tarefa de posicionamento, permite reduzir o número de soluções possíveis. Ou seja, os graus de liberdade excedentes podem ser aproveitados para realizar outras tarefas, tais como: evitar obstáculos, minimizar velocidades ou esforços, minimizar consumo de energia, etc.

### **Controle Cinemático para manipuladores não redundantes:**

Considere que a posição e a orientação da ferramenta do robô em espaço cartesiano sejam descritas pela transformação homogênea  ${}^0T_{N+1}$ . Seja  ${}^0T_{N+1}^*$  uma especificação da localização desejada para a ferramenta. O vetor de variáveis de juntas de referência,  $q^*$ , pode ser facilmente a partir do mapeamento de cinemática inversa do braço  $f_{CI}(\cdot)$ :

$$q^* = f_{CI}({}^0T_{N+1}^*)$$

Seja  $J(q)$  a matriz de jacobiano que relaciona velocidades de junta  $dq/dt$  com o vetor de velocidades da ferramenta em espaço cartesiano  $V$ , temos:

$$V = J(q).dq/dt$$

Se o  $J(q)$  for uma matriz quadrada e  $q$  for uma configuração não singular, então  $J(q)$  pode ser invertida. Seja  $V^*$  o vetor de velocidades cartesianas desejadas para a ferramenta, a lei de controle cinemático por Velocidade Computada é facilmente obtida pela inversão da expressão acima:

$$dq^*/dt = J(q)^{-1}.V^*$$

Derivando a relação entre velocidades em espaço de juntas e velocidades em espaço cartesiano, temos:

$$V' = J(q).d^2q/dt^2 + dJ(q)/dt.dq/dt$$

Sejam  $V'^*$  e  $d^2q^*/dt^2$  as acelerações de referência em espaço cartesiano e em espaço de juntas, respectivamente, a lei de controle cinemático por Aceleração Comutada é facilmente obtida pela inversão da expressão acima:

$$d^2q^*/dt^2 = J(q)^{-1}.[V'^* - dJ(q)/dt.dq/dt]$$

### **Decomposição em Valores Singulares e Matriz Pseudoinversa:**

Como verificado acima, o controle cinemático de manipuladores envolve a inversão do Jacobiano. Quando a matriz jacobiana não é quadrada, a mesma não pode ser invertida da forma tradicional. Por outro lado, técnicas baseadas em matriz pseudoinversa podem ser utilizadas para determinar a solução de sistemas de equações lineares do tipo:

$$A.X = b$$

Onde  $A$  é uma matriz  $m \times n$  não quadrada,  $b$  é um vetor  $m \times 1$  conhecido e  $X$  é um vetor  $n \times 1$  a ser determinado. O método de decomposição em valores singulares é uma técnica matemática que permite obter facilmente a matriz pseudoinversa de  $A$ .

## Decomposição em Valores Singulares:

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ , os autovalores  $\lambda_i$  da matriz não negativa  $A^T.A$  são os valores de  $\lambda$  que satisfazem à equação:

$$\det(\lambda.I - A^T.A) = 0$$

Os autovalores são valores reais não negativos tais que:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

Os valores singulares de  $A^T.A$  são definidos como:

$$\sigma_i = (\lambda_i)^{1/2} \quad \therefore \quad i = 1, 2, \dots, \min(m,n)$$

Assim como os autovalores, os valores singulares são não negativos, assim:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$$

A matriz  $A_{m \times n}$  pode ser expressa na forma denominada Decomposição em Valores Singulares:

$$A = U.\Sigma.V^T$$

onde  $U$  é uma matriz ortogonal  $m \times m$  e  $V$  é uma matriz ortogonal  $n \times n$ , ou seja:

$$U.U^T = U^T.U = I_{m \times m}$$

$$V.V^T = V^T.V = I_{n \times n}$$

A matriz  $\Sigma$ , de dimensões  $m \times n$ , é definida como:

$$\text{Para } m \geq n \Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \sigma_n \\ \hline & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } n \geq m \Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \mathbf{0} & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \mathbf{0} & \dots & \sigma_m & \vdots & \\ & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

O número de valores singulares não nulos é:  $p = \text{posto}(A)$ .

Considere as seguintes transformações lineares:

$$y = A.x$$

$$y_u = U^T.y \Rightarrow y = U.y_u$$

$$x_v = V^T.x \Rightarrow x = V.x_v$$

$$y_u = \Sigma \cdot x_v$$

Assim, fazendo a decomposição em valores singulares de A:

$$y = A \cdot x \quad \Rightarrow \quad y = [U \cdot \Sigma \cdot V^T] \cdot x$$

- a)  $y = [U \cdot \Sigma] \cdot [V^T \cdot x] = [U \cdot \Sigma] \cdot x_v$
- b)  $y = U \cdot [\Sigma \cdot x_v] = U \cdot y_u$
- c)  $y = U \cdot y_u = y$

A transformação (a), de  $x$  para  $x_v$ , envolve uma multiplicação pela matriz ortogonal  $V^T$ , muda a direção do vetor transformado, conservando o seu módulo. A transformação (b), de  $x_v$  para  $y_u$ , envolve uma multiplicação pela matriz diagonal  $\Sigma$ , onde cada elemento  $x_{vi}$  do vetor  $x_v$  é multiplicado pelo valor singular correspondente  $\sigma_i$ . A transformação (c), de  $y_u$  para  $y$ , envolve uma multiplicação pela matriz ortogonal  $U$ , muda a direção do vetor transformado, conservando o seu módulo.

A decomposição em valores singulares pode ser obtida de acordo com o seguinte procedimento:

- i) Determinar os autovalores de  $A^T \cdot A$  como a solução de  $\det(\lambda \cdot I - A^T \cdot A) = 0$ .
- ii) Determinar os valores singulares de  $A^T \cdot A$ :  $\sigma_i = (\lambda_i)^{1/2}$ .
- iii) As colunas  $V_i$  de  $V$  são os autovetores de  $A^T \cdot A$ , ou seja a solução da equação:  $(A^T \cdot A - \lambda_i \cdot I) \cdot V_i = 0$ .
- iv) Para cada valor singular  $\sigma_i > 0$ , a coluna correspondente  $U_i$  da matriz  $U$  é obtida a partir de:  $U_i = (1/\sigma_i) \cdot A \cdot V_i$ .
- v) As colunas restantes de  $U$  são obtidas de modo a  $U$  ser ortogonal, ou seja, de modo a que  $U^T U = I$ .

**Exemplo:** obtenha os valores singulares e a decomposição em valores singulares da matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Os autovalores são a solução de  $\det(\lambda I - A^T \cdot A) = \lambda(\lambda - 4) = 0$ . Assim,  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 0$ . Portanto, os valores singulares são:  $\sigma_1 = (\lambda_1)^{1/2} = 2$ ,  $\sigma_2 = (\lambda_2)^{1/2} = 0$ .

As colunas da matriz  $V$  são os autovetores  $V_1$  e  $V_2$  correspondentes a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente, ou seja:

$$(A^T \cdot A - \lambda_1 \cdot I) \cdot V_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 = [1 \quad 1]^T \cdot (1/2)^{1/2}$$

$$(A^T \cdot A - \lambda_2 \cdot I) \cdot V_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = [1 \quad -1]^T \cdot (1/2)^{1/2}$$



Para  $\sigma_1 = 2 > 0$ , temos:

$$U_1 = (1/\sigma_1) \cdot A \cdot V_1 = [1 \quad 1 \quad 0]^T \cdot (1/2)^{1/2}.$$

As colunas restantes,  $U_2$  e  $U_3$ , são determinadas de modo a que  $U$  seja uma matriz ortogonal, ou seja  $U^T \cdot U = I$ :

$$U_2 = [1 \quad -1 \quad 0]^T \cdot (1/2)^{1/2}.$$

$$U_3 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \cdot (1/2)^{1/2}.$$

### Matriz Pseudoinversa:

Dada uma matriz  $A$   $m \times n$ , define-se a Matriz Pseudoinversa de  $A$ , como a matriz  $A^+$  que satisfaz às seguintes condições:

$$\begin{aligned} A \cdot A^+ \cdot A &= A \\ A^+ \cdot A \cdot A^+ &= A^+ \\ (A \cdot A^+)^T &= A \cdot A^+ \\ (A^+ \cdot A)^T &= A^+ \cdot A \end{aligned}$$

A matriz pseudoinversa de  $A$  possui as seguintes propriedades:

- i)  $(A^+)^+ = A$ .
- ii)  $(A^T)^+ = (A^+)^T$ .
- iii)  $(A \cdot A^T)^+ = (A^+)^T \cdot A^+$ .
- iv) Considere as matrizes  $A$   $m \times n$  e  $B$   $n \times p$ , de modo geral,  $(A \cdot B)^+ \neq B^+ \cdot A^+$ , porém, se  $\text{posto}(A) = \text{posto}(B) = n \Rightarrow (A \cdot B)^+ = B^+ \cdot A^+$ .
- v)  $A^+ = (A^T \cdot A)^+ \cdot A^T = A^T (A \cdot A^T)^+$ .
- vi) Se a matriz  $A$   $m \times n$  é tal que  $\text{posto}(A) = m \Rightarrow A^+ = A^T (A \cdot A^T)^{-1}$ .
- vii) Se a matriz  $A$   $m \times n$  é tal que  $\text{posto}(A) = n \Rightarrow A^+ = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T$ .
- viii) Seja a matriz  $A$   $m \times n$  de posto  $p$ . Seja a decomposição em valores singulares da matriz  $A$  dada por:  $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ , onde  $U$   $m \times m$  e  $V$   $n \times n$  são matrizes ortogonais e  $\Sigma$  é a matriz de valores singulares. A matriz pseudoinversa de  $A$  pode ser calculada como:  $A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$ , onde a matriz  $\Sigma^+$   $n \times m$  é dada por,

$$\Sigma^+ = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1^{-1} & & & & & \\ & \sigma_2^{-1} & & & & \\ & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & & & & \sigma_p^{-1} & \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

- ix) Dado o sistema linear  $A \cdot X = b$ , com  $A$   $m \times n$ ,  $b$   $m \times 1$  e  $X$   $n \times 1$ ; a sua solução geral é dada por  $X = A^+ \cdot b + (I - A^+ \cdot A) \cdot K$ , onde  $K$  é um vetor  $n \times 1$  arbitrário. Se o sistema não tem solução, esta expressão minimiza  $\|A \cdot X - b\|$ . A solução particular  $X = A^+ \cdot b$ , ( $K = 0$ ), minimiza também  $\|X\|$ .

**Exemplo:** calcule a matriz pseudoinversa da matriz A abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja a decomposição em valores singulares de A,  $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ , então, a matriz pseudoinversa de A é dada por:  $A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T$ ,

$$\Rightarrow A^+ = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

### **Manipulabilidade:**

Podemos definir manipulabilidade como a habilidade que um manipulador possui de movimentar arbitrariamente a sua ferramenta. Medidas adequadas, que definem de forma precisa a manipulabilidade, podem ser extraídas do Elipsóide de Manipulabilidade. A manipulabilidade de um robô não é constante, mas varia em função da sua configuração. Por exemplo, quando o braço está completamente estendido, não pode alcançar pontos além do limite do seu espaço de trabalho, portanto a sua manipulabilidade cai drasticamente nas proximidades deste limite.

### **Elipsóide de Manipulabilidade:**

Define-se o Elipsóide de Manipulabilidade como o conjunto de todas as velocidades da ferramenta,  $v$ , para as quais:

$$\|dq/dt\| = ([dq/dt]^T \cdot [dq/dt])^{1/2} = ((dq_1/dt)^2 + (dq_2/dt)^2 + \dots (dq_n/dt)^2)^{1/2} \leq 1$$

A solução geral do sistema linear  $v = J \cdot dq/dt$ , que relaciona velocidades de juntas,  $dq/dt$ , a velocidades cartesianas,  $v$ , através da matriz jacobiana  $m \times n$ ,  $J = J(q)$ , é:

$$dq/dt = J^+ \cdot v + (I - J^+ \cdot J) \cdot K$$

onde  $K$  é um vetor constante arbitrário. A solução particular para  $K = 0$ ,  $dq/dt = J^+ \cdot v$ , minimiza  $\|dq/dt\|$ . Expressando  $\|dq/dt\|^2$  em termos de  $v$ , temos:

$$\|dq/dt\|^2 = [dq/dt]^T \cdot [dq/dt] = v^T (J^+)^T \cdot J^+ \cdot v + 2K^T (I - J^+ \cdot J)^T J^+ \cdot v + K^T (I - J^+ \cdot J)^T \cdot (I - J^+ \cdot J) K$$

Usando as propriedades da matriz pseudoinversa, pode-se provar que o segundo termo do lado direito da equação acima é nulo. Assim,

$$\|dq/dt\|^2 = v^T (J^+)^T \cdot J^+ \cdot v + K^T (I - J^+ \cdot J)^T \cdot (I - J^+ \cdot J) K$$

$$\Rightarrow \|dq/dt\|^2 \geq v^T (J^+)^T \cdot J^+ \cdot v$$

Substituindo esta desigualdade no elipsóide de manipulabilidade, temos:

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} \leq \|\mathbf{dq}/\mathbf{dt}\|^2 \leq 1$$

Portanto, o elipsóide de manipulabilidade é dado pelo conjunto de todas as velocidades da ferramenta, realizável pelo vetor  $\mathbf{dq}/\mathbf{dt}$ , tal que  $\|\mathbf{dq}/\mathbf{dt}\| \leq 1$ , ou seja, tal que:

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} \leq 1$$

Expressando o jacobiano na sua decomposição em valores singulares, temos:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{U}].[\mathbf{\Sigma}].[\mathbf{V}]^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}^+ = [\mathbf{V}].[\mathbf{\Sigma}]^+.[\mathbf{U}]^T$$

Onde  $[\mathbf{U}]_{m \times m}$  e  $[\mathbf{V}]_{n \times n}$  são matrizes ortogonais e  $[\mathbf{\Sigma}]_{m \times n}$  é a matriz de valores singulares de  $\mathbf{J}$ . Assim,

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T.[\mathbf{U}].([\mathbf{\Sigma}]^+)^T.[\mathbf{V}]^T.[\mathbf{V}].[\mathbf{\Sigma}]^+.[\mathbf{U}]^T \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^T.[\mathbf{U}].([\mathbf{\Sigma}^+)]^T.[\mathbf{\Sigma}]^+.[\mathbf{U}]^T \cdot \mathbf{v}$$

Definindo a seguinte transformação ortogonal:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{U}].\mathbf{v}_U \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_U = [\mathbf{U}]^T \cdot \mathbf{v}$$

temos que,

$$\mathbf{v}^T(\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_U^T.[([\mathbf{\Sigma}]^+)]^T.[\mathbf{\Sigma}]^+ \cdot \mathbf{v}_U$$

Considerando que:

$$[\mathbf{\Sigma}]^+ = \left[ \begin{array}{cccc|c} \sigma_1^{-1} & & & \mathbf{0} & \\ & \sigma_2^{-1} & & & \\ & & \dots & & \\ \mathbf{0} & & & \sigma_p^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right]$$

onde  $p = \text{posto}(\mathbf{J}) \leq m$ , temos que,

$$[\mathbf{\Sigma}]^+ \cdot \mathbf{v}_U = [(\sigma_1^{-1} \cdot v_{U1}) \quad (\sigma_2^{-1} \cdot v_{U2}) \quad \dots \quad (\sigma_p^{-1} \cdot v_{Up}) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}^T(\mathbf{J}^+)^T \cdot \mathbf{J}^+ \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_U^T.[([\mathbf{\Sigma}]^+)]^T.[\mathbf{\Sigma}]^+ \cdot \mathbf{v}_U = (\sigma_1^{-1} \cdot v_{U1})^2 + (\sigma_2^{-1} \cdot v_{U2})^2 + \dots + (\sigma_p^{-1} \cdot v_{Up})^2$$

Desta maneira, o elipsóide de manipulabilidade pode ser representado na seguinte forma equivalente:

$$\sum (v_{Ui}^2 / \sigma_i^2) \leq 1 \quad \therefore \sigma_i \neq 0$$

Assim, as colunas  $U_i$  da matriz  $[\mathbf{U}]$  determinam a direção dos eixos principais do elipsóide de manipulabilidade e cada valor singular  $\sigma_i$  corresponde ao raio do eixo principal na direção  $U_i$ , ou seja, os eixos principais do elipsóide de manipulabilidade são  $\sigma_1 \cdot U_1, \sigma_2 \cdot U_2, \dots, \sigma_p \cdot U_p$ , como mostra a figura 5.1.

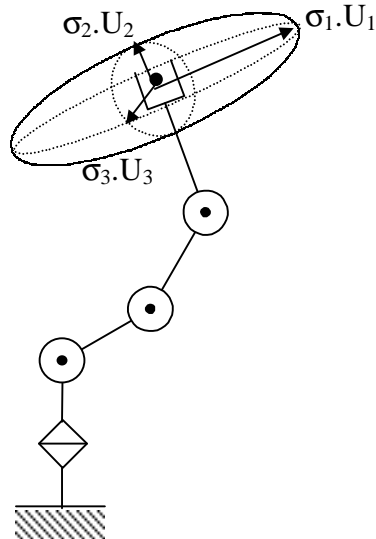


Figura 5.1. Elipsóide de manipulabilidade.

### Medidas de Manipulabilidade

O elipsóide de manipulabilidade definido acima é uma expressão matemática que incorpora em sua estrutura importantes informações sobre a capacidade de manipulação do robô em uma dada configuração de juntas  $q$ . A sua representação geométrica permite definir medidas de manipulabilidade de forte apelo intuitivo. Verifica-se que o eixo maior do elipsóide corresponde à direção em que é possível obter a maior velocidade cartesiana a partir das velocidades impostas nas juntas. Da mesma maneira, o eixo menor do elipsóide corresponde à direção em que menos velocidade cartesiana pode ser obtida a partir das velocidades impostas às juntas. Quanto maior o elipsóide, mais rápido pode-se mover a ferramenta. Assim, a quantidade de espaço (“volume”) contida no elipsóide é uma boa medida da capacidade de manipulação do robô. O “volume” do elipsóide de manipulabilidade é dado por:

$$\text{Vol} = c(m) \cdot w$$

onde,

$$w = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \dots \cdot \sigma_m.$$

$$c(m) = (2\pi)^{m/2} / [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot m] \quad \text{se } m \text{ for par.}$$

$$c(m) = 2 \cdot (2\pi)^{(m-1)/2} / [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot m] \quad \text{se } m \text{ for impar.}$$

Como  $c(m)$  é constante para um dado valor de  $m$ , o “volume” do elipsóide de manipulabilidade é proporcional a  $w$ . Assim, podemos estabelecer  $w$  como uma medida de manipulabilidade, a qual será função da configuração  $q$  do robô. A medida de manipulabilidade pode ser calculada por:

$$w = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \dots \cdot \sigma_m = (\det[J(q) \cdot J(q)^T])^{1/2}$$

Quando  $m = n$ , a matriz de jacobiano é quadrada, (o manipulador não é redundante). Neste caso, o cálculo da medida de manipulabilidade é simplificado para:

$$w = |\det(J(q))|$$

Verifique que, quando o robô está em uma configuração singular, o posto da matriz jacobiano é menor do que  $m$ , (o manipulador perde um ou mais graus de liberdade em espaço cartesiano). Nesta situação, um ou mais valores singulares se anulam, de modo que a medida de manipulabilidade é igual a zero na singularidade, ou seja:

$$w = 0 \Leftrightarrow \text{posto}(J(q)) < m$$

Assim, quanto mais próximo o robô estiver de uma singularidade, menor será a sua medida de singularidade. Desta maneira, podemos considerar que  $w$  também é uma medida da distância da configuração atual do robô a configurações singulares.

Outras medidas que caracterizam a capacidade de manipulação do robô podem ser extraídas do elipsóide de manipulabilidade. Por exemplo:

$$w_{m/M} = \sigma_m / \sigma_M$$

A medida  $w_{m/M}$  representa a razão entre o comprimento do eixo menor e o comprimento do eixo maior do elipsóide de manipulabilidade, ou seja, é uma medida da alongação do elipsóide. A forma do elipsóide será mais próxima de uma esfera, quanto mais próximo de um for o valor de  $w_{m/M}$ . Assim, esta medida também dá uma idéia da uniformidade de resposta que pode ser conseguida nas diferentes direções de movimento da ferramenta.

Uma outra medida que pode ser extraída do elipsóide de manipulabilidade é o comprimento do seu eixo menor:

$$w_m = \sigma_m$$

Esta medida fornece um limite inferior para a velocidade máxima da ferramenta. Quanto maior for  $w_m$ , maior será a velocidade que pode ser alcançada em espaço cartesiano.

Outra medida de manipulabilidade é a média geométrica dos eixos do elipsóide:

$$w_e = (\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \dots \cdot \sigma_m)^{1/m}$$

Esta medida corresponde ao raio de uma esfera com volume igual ao do elipsóide de manipulabilidade, ou seja, dá uma idéia da capacidade de manipulação sem levar em conta a direção em que esta é realizada.

### Elipsóide de Esforços de Manipulação:

A partir do conceito do conceito de manipulabilidade, pode-se também determinar a capacidade que a ferramenta do manipulador tem de exercer esforços em direções específicas. Seja  $\tau$  o vetor  $n \times 1$  de esforços aplicados pelos atuadores nas juntas e seja  $F$  o vetor  $m \times 1$  de esforços correspondentes exercidos pela ferramenta no espaço de trabalho  $m$  dimensional. Como demonstrado previamente, estes dois vetores são equivalentes e se relacionam através da matriz jacobiana  $m \times n$ ,  $J(q)$ :

$$\tau = J(q)^T \cdot F$$

Se  $\text{posto}(J(q)) = m$ , de forma análoga ao caso do mapeamento entre velocidades de juntas e velocidades cartesianas, o conjunto de todos os esforços  $F$  realizáveis pelo vetor de esforços de juntas  $\tau$ , tal que  $\|\tau\| \leq 1$ , forma um elipsóide no espaço euclidiano  $m$ -dimensional dado pela expressão:

$$F^T \cdot J(q) \cdot J(q)^T \cdot F \leq 1$$

O elipsóide acima é denominado Elipsóide de Esforços de Manipulação. Por um procedimento baseado na decomposição em valores singulares da matriz jacobiana, análogo ao utilizado para o elipsóide de manipulabilidade, pode-se mostrar que os eixos principais do elipsóide de esforços de manipulação são dados por  $\sigma_1^{-1} \cdot U_1$ ,  $\sigma_2^{-1} \cdot U_2$ , ...,  $\sigma_p^{-1} \cdot U_p$ . Observe que o comprimento destes eixos é inversamente proporcional ao comprimento dos eixos correspondentes do elipsóide de manipulabilidade. Portanto, na direção em que a manipulabilidade é grande o esforço de manipulação correspondente é pequeno, e vice-versa. Da mesma forma, volume do elipsóide de esforços de manipulação é inversamente proporcional à medida de manipulabilidade:

$$\text{Vol} = c(m)/w$$

Portanto, quanto maior a manipulabilidade, menor o esforço de manipulação, e vice-versa.

**Exemplo:** determine a medida de manipulabilidade para o manipulador articulado planar de dois graus de liberdade.

O jacobiano que relaciona velocidades de junta com a velocidade linear da ferramenta em espaço cartesiano é dado por:

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} (-L_1 s_1 - L_2 s_{12}) & (-L_2 s_{12}) \\ (L_1 c_1 + L_2 c_{12}) & (L_2 c_{12}) \end{bmatrix}$$

Como o jacobiano é quadrado, podemos fazer:

$$w = |\det({}^0J(q))|$$

$$\Rightarrow w = L_1 \cdot L_2 \cdot |\text{sen}(\theta_2)|$$

Observe que (ver figura 5.2):

A medida  $w$  é máxima para  $\theta_2 = (2.k+1).\pi/2$ , com  $k$  inteiro.

A medida  $w$  é mínima para  $\theta_2 = k.\pi$ , com  $k$  inteiro.

De forma análoga:

O esforço de manipulação é mínimo para  $\theta_2 = (2.k+1).\pi/2$ , com  $k$  inteiro.

O esforço de manipulação é máximo para  $\theta_2 = k.\pi$ , com  $k$  inteiro.

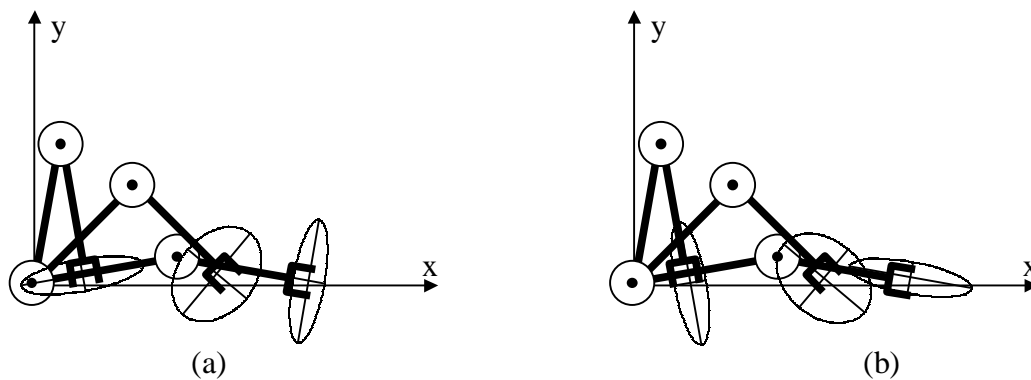


Figura 5.2. Manipulabilidade para um braço planar de dois graus de liberdade.

a) Elipsóide de manipulabilidade. b) Elipsóide de esforços de manipulação.

### **Controle Cinemático de Manipuladores Redundantes:**

#### **Manipulador redundante:**

Um manipulador redundante é aquele que possui mais graus de liberdade controlados pelos atuadores em espaço de juntas do que aqueles necessários para realizar uma tarefa especificada em espaço cartesiano. Estes graus de liberdade excedentes garantem uma melhor manipulabilidade aos manipuladores redundantes, permitindo, por exemplo, contornar singularidades, obstáculos ou limitações estruturais. A redundância também permite executar tarefas adicionais de acordo com algum critério: baixo consumo de energia, balanceamento de velocidades de junta, balanceamento de esforços de juntas, etc. Os graus de liberdade adicionais tornam o manipulador redundante mais confiável e tolerante a falhas. Dependendo da situação, o robô pode executar certas tarefas mesmo com a falha de uma ou mais juntas. Por outro lado, de modo geral, os manipuladores redundantes apresentam uma maior complexidade, são mais pesados e requerem algoritmos de controle mais complicados do que os manipuladores não redundantes.

#### **Decomposição de tarefas:**

Uma tarefa complexa pode ser decomposta em duas ou mais sub-tarefas, cada qual com uma prioridade especificada. A tarefa mais prioritária é executada por completo pelo manipulador e os graus de liberdade excedentes são usados para as tarefas menos prioritárias. Por exemplo, na pintura de uma superfície plana, manter a

orientação da pistola de tinta perpendicular à superfície é uma tarefa que deve ser realizada com maior prioridade do que a tarefa de manter a posição da pistola. A especificação das tarefas pode ser feita duas de maneiras diferentes:

- a) por uma trajetória dada, especificada pelo operador;
- b) por uma função critério, quando o operador não conhece a trajetória desejada, mas sabe como avaliá-la, (como por exemplo, quando se deseja que a trajetória envolva um gasto mínimo de energia).

### **Especificação da Sub-tarefa mais prioritária:**

Considere que a sub-tarefa mais prioritária consiste em controlar o vetor de manipulação  $X_1$ , de dimensão  $m_1 \times 1$ , função das variáveis de junta:

$$X_1 = f_1(q)$$

A derivada temporal de  $X_1$  se relaciona com as velocidades de junta através da matriz jacobiana  $J_1(q)$  correspondente:

$$dX_1/dt = V_1 = J_1(q).dq/dt \quad \therefore \quad J_1(q) = \partial f_1(q)/\partial q^T$$

Se a trajetória desejada para  $X_1$  é especificada como  $X_1^*(t)$ , com  $0 \leq t \leq T$ , onde  $T$  é o tempo estabelecido para concluir a tarefa, então, dado  $V_1^*(t) = dX_1(t)/dt$ , a solução geral da equação acima é dada por:

$$dq^*/dt = J_1^+.V_1^* + (I - J_1^+.J_1).K_1$$

onde  $K_1$  é um vetor constante arbitrário de dimensão  $n \times 1$ . Verifique a solução acima é constituída por dois termos componentes:

- Primeiro termo,  $J_1^+.V_1^*$ , velocidade necessária para realizar a trajetória de junta  $X_1^*(t)$ . Esta velocidade minimiza  $\|dq/dt\|$  quando existem múltiplas ou infinitas soluções. Quando não existe solução, fornece a solução aproximada que minimiza o erro:  $\|V_1^* - J_1.dq/dt\|$ .
- Segundo termo,  $(I - J_1^+.J_1).K_1$ , redundância remanescente para realizar tarefas adicionais.

### **Especificação da sub-tarefa menos prioritária por uma trajetória:**

Considere que a sub-tarefa menos prioritária consiste em controlar o vetor de manipulação  $X_2$ , de dimensão  $m_1 \times 1$ , função das variáveis de junta:

$$X_2 = f_2(q)$$

A derivada temporal de  $X_2$  se relaciona com as velocidades de junta através da matriz jacobiana  $J_2(q)$  correspondente:

$$dX_2/dt = V_2 = J_2(q).dq/dt \quad \therefore \quad J_2(q) = \partial f_2(q)/\partial q^T$$



Impondo  $V_2 = V_2^* = J_2 \cdot dq/dt$  e multiplicando a solução da sub-tarefa mais prioritária por  $J_2$ , temos:

$$J_2 \cdot dq^*/dt = J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^* + J_2 \cdot (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot K_1$$

$$\Rightarrow (V_2^* - J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^*) = J_2 \cdot (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot K_1$$

ou,

$$V^* = J \cdot K_1$$

onde,  $V^* = (V_2^* - J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^*)$  e  $J = J_2 \cdot (I - J_1^+ \cdot J_1)$ . A solução geral do sistema linear acima é dada por:

$$K_1 = J^+ \cdot V^* + (I - J^+ \cdot J) \cdot K_2$$

$$\Rightarrow K_1 = J^+ \cdot (V_2^* - J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^*) + (I - J^+ \cdot J) \cdot K_2$$

onde  $K_2$  é um vetor constante arbitrário de dimensão  $n \times 1$ . Assim, o vetor de velocidades de juntas  $dq^*/dt$  que realiza a tarefa  $X_1^*$  completamente e, utilizando a redundância, a tarefa  $X_2^*$  com o menor erro possível, é dado por:

$$dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot [J^+ \cdot (V_2^* - J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^*) + (I - J^+ \cdot J) \cdot K_2]$$

Pode-se provar que  $(I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot J^+ = J^+$ , assim:

$$dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + J^+ \cdot (V_2^* - J_2 \cdot J_1^+ \cdot V_1^*) + (I - J_1^+ \cdot J_1 - J^+ \cdot J) \cdot K_2$$

Observações:

- Se  $(I - J_1^+ \cdot J_1 - J^+ \cdot J) \neq 0$ , ainda sobra redundância para uma terceira sub-tarefa.
- Se  $X_2 = q$ , ( $J_2 = I$ ), então,  $dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot V_2^*$ .
- Quando os servocontroladores de junta garantem um perfeito rasteio de trajetória de juntas, ( $q = q^*$ ), a primeira sub-tarefa é realizada com exatidão, ( $X_1 = X_1^*$ ). Porém, é possível que ocorra algum desvio na segunda sub-tarefa, ( $X_2 \cong X_2^*$ ), quando os graus de liberdade remanescentes são insuficientes. Um esquema simples adotado para contornar este problema modifica a segunda trajetória de referência para:

$$V_2^{**} = V_2^* + H \cdot (X_2^* - X_2)$$

onde  $H$  é uma matriz diagonal constante de ganhos apropriados. A referência modificada  $V_2^{**}$  é utilizada no lugar de  $V_2^*$  na equação de controle cinemático.

### **Especificação da sub-tarefa menos prioritária por uma função critério:**

Considere que a segunda sub-tarefa é especificada por uma função critério  $v(q)$  a ser maximizada. Definindo o vetor  $\xi$ , de dimensão  $n \times 1$ , como:

$$\xi = \partial v(q) / \partial q$$

Então,

$$d\upsilon(q)/dt = [\partial\upsilon(q)/\partial q^T] \cdot dq/dt = \xi^T \cdot dq/dt$$

O objetivo da lei de controle cinemático é maximizar a função critério através dos graus de liberdade remanescentes da primeira sub-tarefa, enquanto esta última é realizada completamente. Para que isto aconteça, a derivada da função critério  $\upsilon(q)$  deve ser positiva, ou seja,  $d\upsilon(q)/dt \geq 0$ . Se esta condição for satisfeita, a função critério será monotonicamente crescente. Uma maneira de impor esta condição é adotando:

$$K_1 = K_P \cdot \xi$$

Onde  $K_P$  é uma constante positiva e grande. Com esta imposição, a lei de controle cinemático é dada por:

$$dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot K_P \cdot \xi$$

Multiplicando os dois lados da expressão acima por  $\xi^T$ , temos:

$$\xi^T \cdot dq^*/dt = \xi^T \cdot J_1^+ \cdot V_1^* + \xi^T \cdot (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot K_P \cdot \xi$$

$$\Rightarrow d\upsilon(q)/dt = \xi^T \cdot J_1^+ \cdot V_1^* + K_P \cdot \xi^T \cdot (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot \xi$$

Como a matriz  $(I - J_1^+ \cdot J_1)$  é não negativa definida, o segundo termo à direita é sempre maior ou igual a zero. Assim, se  $K_P$  for escolhido suficientemente grande, de modo a sempre superar o valor absoluto do termo  $\xi^T \cdot J_1^+ \cdot V_1^*$ , pode-se garantir que  $d\upsilon(q)/dt$  seja maior ou igual a zero, ou seja, que  $\upsilon(q)$  seja monotonicamente crescente. Observe que, na prática,  $K_P$  não pode ser escolhido arbitrariamente grande, sob pena de gerar referências de velocidades de junta muito altas, que podem ultrapassar as limitações dos atuadores.

### Exemplo:

Considere o manipulador articulado planar de três graus de liberdade mostrado na figura 5.3. Os comprimentos dos elos são:  $L_1 = L_2 = 1$ ,  $L_3 = 0.3$ . Projete um controlador cinemático que realize as seguintes sub-tarefas:

- Tarefa mais prioritária: controle da posição da ferramenta de modo a seguir o segmento de reta vertical, partindo do ponto  $q = [20^\circ \ 30^\circ \ 20^\circ]^T$ , (que corresponde a  $(x_0, y_0) \cong (1.69, 1.39)$ ), até o ponto  $(x, y) = (1.69, 0.00)$ . Trajetória de referência de duração  $T = 1$  segundo:

$$X_1^*(t) = [x(t) \ y(t)]^T = [x_0 \ y_0(1 - 3t^2 + 2t^3)]^T$$

- Tarefa menos prioritária: Evitar o obstáculo retangular situado abaixo do eixo x, de vértices  $(1,0)$ ,  $(0.5,0)$ ,  $(0.5,-1)$ ,  $(1,-1)$ .

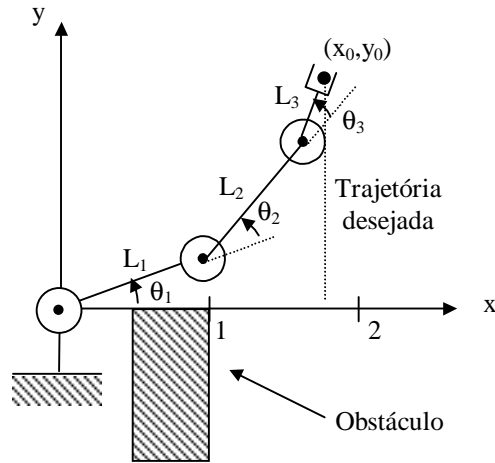


Figura 5.3. Manipulabilidade redundante planar de três graus de liberdade.

A variável de manipulação é a posição da ferramenta  $(x,y)$ , que, em função dos ângulos de junta é dada por:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cdot c_1 + L_2 \cdot c_{12} + L_3 \cdot c_{123} \\ L_1 \cdot s_1 + L_2 \cdot s_{12} + L_3 \cdot s_{123} \end{bmatrix}$$

Portanto, o jacobiano associado à sub-tarefa mais prioritária é:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(L_1 \cdot s_1 + L_2 \cdot s_{12} + L_3 \cdot s_{123}) & -(L_2 \cdot s_{12} + L_3 \cdot s_{123}) & -(L_3 \cdot s_{123}) \\ (L_1 \cdot c_1 + L_2 \cdot c_{12} + L_3 \cdot c_{123}) & (L_2 \cdot c_{12} + L_3 \cdot c_{123}) & (L_3 \cdot c_{123}) \end{bmatrix}$$

A primeira sub-tarefa é dada por  $X_1^*$ , já especificada, portanto:

$$V_1^*(t) = dX_1^*(t)/dt = [0 \quad y_0(-6t + 6t^2)]^T$$

Para a segunda sub-tarefa, escolhamos uma configuração de referência constante, de forma que, ao tentar permanecer o mais próximo possível da mesma, o braço robótico evite o obstáculo. A trajetória de referência escolhida, mostrada na figura 5.4, é dada por:

$$X_2^* = [45^\circ \quad -70^\circ \quad 0^\circ]^T$$

De onde deduzimos que a sua derivada  $V_2^* = dX_2^*(t)/dt$  é nula. Assim, como  $X_2 = q$ , podemos adotar:

$$V_2^{**} = V_2^* + H \cdot (X_2^* - X_2) = H \cdot (X_2^* - X_2)$$

A lei de controle cinemático pode ser obtida substituindo as expressões de  $J_1$ ,  $V_1^*$ ,  $X_2^*$  e  $X_2$  em:

$$dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot H \cdot (X_2^* - X_2)$$

Onde  $H$  é uma matriz  $3 \times 3$  diagonal de ganhos constantes a ser determinada. As figuras 5.5 e 5.6 mostram a trajetória do braço para  $H = 0 \cdot I$  e  $H = 0.2 \cdot I$ , respectivamente.

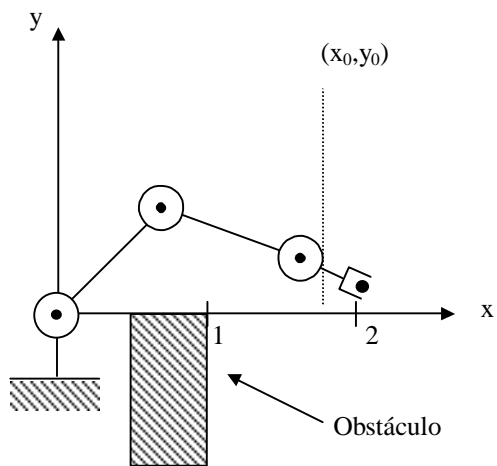


Figura 5.4. Referência  $X_2^* = q = [45^\circ \ -70^\circ \ 0^\circ]^T$ .

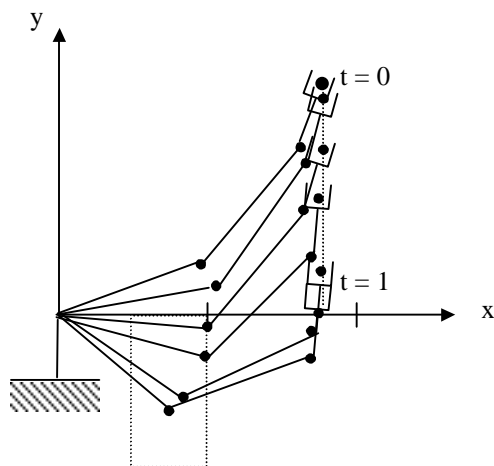


Figura 5.5. Controle de trajetória sem usar a redundância ( $H = 0$ ).

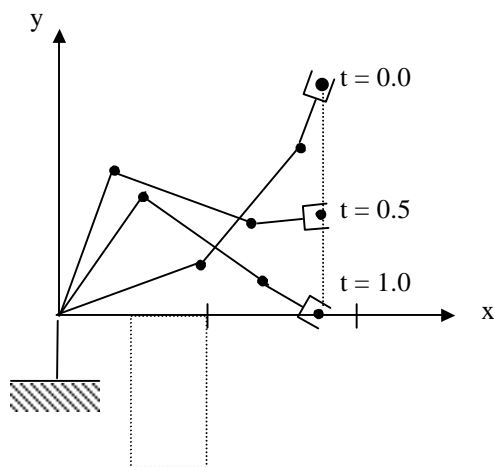


Figura 5.6. Contorno de obstáculo usando a redundância ( $H = 0.2.I$ ).

Observe que quando  $H = 0$ , a redundância não é utilizada, de modo que a solução obtida é aquela que minimiza  $\|dq/dt\|$ , sem conseguir evitar a colisão com o obstáculo, pois a segunda sub-tarefa não é realizada. Por outro lado, quando  $H = 0.2.I$ , a redundância disponível é utilizada para realizar a segunda sub-tarefa, conseguindo evitar a colisão com o obstáculo, porém sem minimizar  $\|dq/dt\|$ , (veja que há mudanças bruscas na configuração do robô, que correspondem a velocidades mais altas).

### Exemplo:

Considere o mesmo manipulador articulado planar de três graus de liberdade do exemplo anterior. Projete um controlador cinemático que realize as seguintes sub-tarefas:

- a) Tarefa mais prioritária: semelhante à do exemplo anterior. Seguir a trajetória  $X_1(t)$  de duração  $T = 1.0$  segundo, com  $(x_0, y_0) = (0.28, 0.27)$ , (que corresponde a  $q = [180^\circ \quad -170^\circ \quad -10^\circ]^T$ ):

$$X_1^*(t) = [x(t) \quad y(t)]^T = [x_0 \quad y_0(1 - 3t^2 + 2t^3) + 0.1 \cdot (-3t^2 + 2t^3)]^T$$

- b) Evitar singularidades.

A primeira sub-tarefa é dada por  $X_1^*$ , já especificada, portanto:

$$V_1^*(t) = dX_1^*(t)/dt = [0 \quad y_0(-6t + 6t^2) + 0.1(-6t + 6t^2)]^T$$

A Segunda sub-tarefa pode ser executada de forma a maximizar a função critério dada pela medida de manipulabilidade, que também é uma medida da “distância” a configurações singulares. Neste caso, é necessário obter:

$$v(q) = w = (\det[J(q).J(q)^T])^{1/2}$$

$$\xi = \partial v(q)/\partial q$$

A lei de controle cinemático é dada por:

$$dq^*/dt = J_1^+ \cdot V_1^* + (I - J_1^+ \cdot J_1) \cdot K_P \cdot \xi$$

As figuras 5.7 e 5.8 mostram a trajetória do braço para  $K_P = 0$  e  $K_P = 20$ , respectivamente. Observe que quando  $K_P = 0$ , a redundância não é utilizada, de modo que a solução obtida é aquela que minimiza  $\|dq/dt\|$ , sem conseguir evitar a singularidade, pois a segunda sub-tarefa não é realizada. Por outro lado, quando  $K_P = 20$ , a redundância disponível é utilizada para realizar a segunda sub-tarefa, conseguindo evitar a singularidade, porém sem minimizar  $\|dq/dt\|$ , (veja que há mudanças bruscas na configuração do robô, que correspondem a velocidades mais altas).

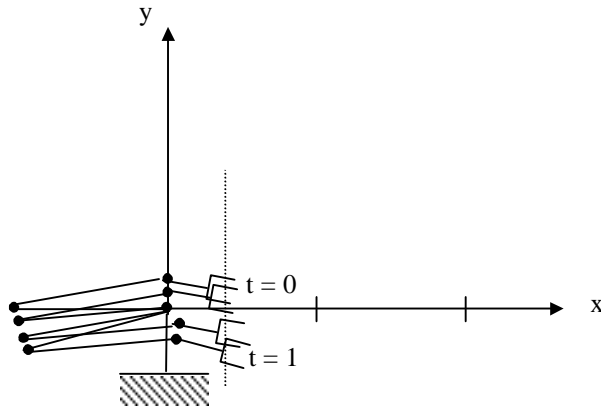


Figura 5.7. Controle sem usar a redundância, ( $K_p = 0$ ), não evita a singularidade.

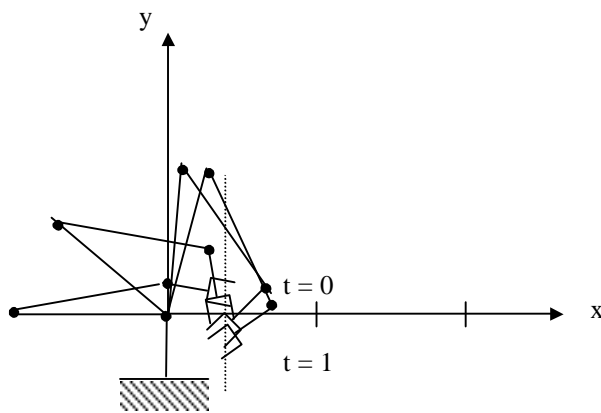


Figura 5.8. Controle usando a redundância, ( $K_p = 20$ ), contorna a singularidade.

### Considerações Computacionais:

O cômputo da matriz pseudoinversa do jacobiano envolve um grande esforço computacional. A metodologia descrita a seguir permite calcular de modo eficiente a lei de controle cinemático da forma:

$$dq^*/dt = J^+ \cdot V^* + (I - J^+ \cdot J) \cdot K$$

Se a matriz  $(J \cdot J^T)$  é não singular, então, a matriz pseudoinversa do jacobiano pode ser calculada por  $J^+ = J^T \cdot (J \cdot J^T)^{-1}$ . Assim, a lei de controle pode ser reformulada da seguinte maneira:

$$dq^*/dt = J^T \cdot (J \cdot J^T)^{-1} \cdot (V^* + J \cdot K) + K$$

Definindo:

$$X = (J \cdot J^T)^{-1} \cdot (V^* + J \cdot K)$$

Este vetor pode ser obtido através de algum método numérico eficiente, (por exemplo, o método de eliminação de Gauss), como solução do sistema linear:

$$(J.J^T).X = (V^* + J.K)$$

A seguir, as velocidades de referência das juntas podem ser obtidas facilmente a partir de:

$$dq^*/dt = J^T.X + K$$

Observação: nas proximidades de uma singularidade, esta solução pode degenerar devido ao mau condicionamento da matriz  $(J.J^T)$ . Um método para contornar esta situação é substituir  $(J.J^T)$  por  $(J.J^T + \delta.I)$ . Assim, o vetor  $X$  deve ser redefinido como a solução do sistema linear:

$$(J.J^T + \delta.I).X = (V^* + J.K)$$

A função de regularização  $\delta$  deve ser contínua e positiva perto da singularidade, anulando-se longe da mesma. Por exemplo, usando a medida de manipulabilidade  $w$  para medir a distância a singularidades, podemos definir a seguinte função de regularização, mostrada na figura 5.9:

$$\delta = \delta_0.(1 - w/w_0)^2 \quad \text{para } w < w_0$$

$$\delta = 0 \quad \text{para } w \geq w_0$$

onde  $\delta_0 > 0$  é a magnitude de regularização e  $w_0 > 0$  é o raio da região centrada na singularidade, dentro da qual atua o termo de regularização.

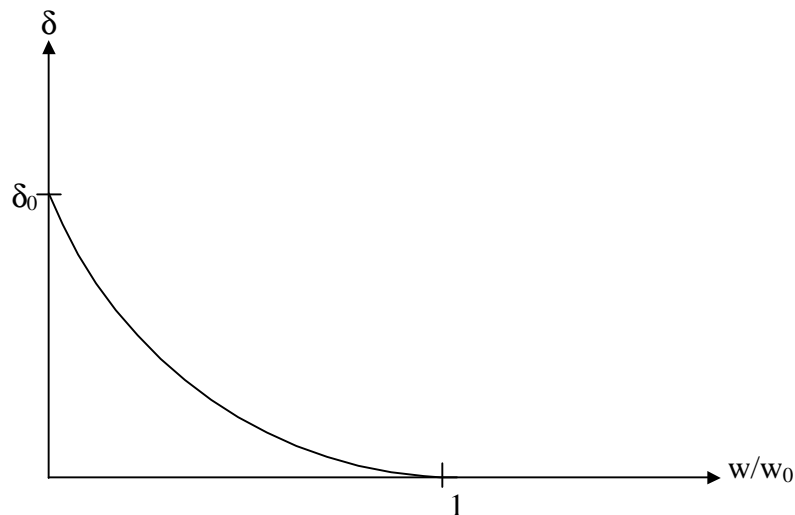


Figura 5.9. Função de regularização para a matriz  $J.J^T$ .

### 5.3. Controle Dinâmico de Posição:

Nas leis de controle cinemático estudadas, as entradas de controle são as posições das juntas do robô, onde assumimos que estas podem ser impostas arbitrariamente, de modo a posicionar a ferramenta no espaço de trabalho. Na prática, as variáveis de junta devem ser impostas através dos atuadores do manipulador, como por exemplo, pela aplicação de um torque adequado por meio de um motor elétrico. As variáveis de junta não são impostas instantaneamente pelos atuadores, mas respondem de acordo com uma dinâmica que depende das características do atuador, do braço e de eventuais transmissões mecânicas. Portanto, em um nível hierárquico inferior, é necessário estabelecer laços de controle dinâmico adequados para garantir que as variáveis de junta converjam rapidamente para as referências de junta requeridas pelos controladores cinemáticos.

#### Controle de Posição:

O controlador de posições de junta deve fornecer os esforços de junta  $\tau(t)$  capazes de fazer com que a trajetória de juntas  $q(t)$  convirja para a trajetória de juntas desejada  $q(t)^*$ . Assim, conforme mostra a figura abaixo, um controlador de juntas genérico recebe como entradas a trajetória de referência de juntas,  $q(t)^*$ , e a trajetória medida,  $q(t)$ , fornecendo como saída o vetor de esforços de juntas,  $\tau(t)$ , que devem ser aplicados pelos atuadores.

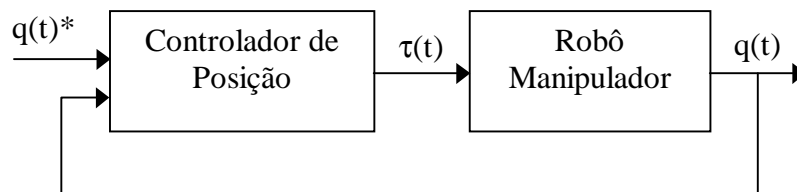


Figura 5.10. Controle de Posição.

#### **Especificação da dinâmica desejada:**

O controlador deve fazer com que o erro de posição,  $e(t) = q(t)^* - q(t)$ , convirja para zero quando o tempo  $t$  tende a infinito. O erro deve ser minimizado de acordo com algum comportamento dinâmico desejado. Frequentemente, especifica-se uma resposta dinâmica de segunda ordem para o erro  $e(t)$ :

$$d^2e(t)/dt^2 + 2.\xi.\omega_n.de(t)/dt + \omega_n^2.e(t) = 0$$

onde frequência natural  $\omega_n$  e o coeficiente de amortecimento  $\xi$  determinam o comportamento dinâmico do sistema em malha fechada. Assim, tomando a transformada de Laplace da equação acima, obtemos equação característica do sistema:

$$s^2 + 2.\xi.\omega_n.s + \omega_n^2 = 0$$

cuja solução define os pólos em malha fechada:  $s = -\xi.\omega_n \pm \omega_n.[\xi^2 - 1]^{1/2} = -\xi.\omega_n \pm \omega_d$



Portanto, verifica-se que, qualitativamente, a resposta dinâmica depende do valor do coeficiente de amortecimento:

- a) Para  $0 < \xi < 1$ , o sistema é sub-amortecido.
- b) Para  $\xi = 1$ , o sistema é criticamente amortecido.
- c) Para  $\xi > 1$ , o sistema é sobre-amortecido.

Assim, inicialmente,  $\xi$  deve ser escolhido de acordo com a velocidade de resposta desejada. Com  $\xi = 1$ , o sistema é criticamente amortecido e o erro converge para zero rapidamente e sem oscilações. A frequência  $\omega_d = \omega_n \cdot [\xi^2 - 1]^{1/2}$  deve ser escolhida a maior possível, respeitando as limitações do *hardware* e as impostas pelo sinal de referência utilizado. Em particular, deve-se evitar excitar modos de ressonância mecânica, de maneira a evitar vibrações indesejadas na estrutura do manipulador.

### Esquema de Controle por Torque Computado:

O esquema de controle por torque computado se baseia na compensação da dinâmica do manipulador, de modo a obter uma dinâmica linear e desacoplada em malha fechada, permitindo assim o controle de cada junta de modo independente. A partir desta linearização e do desacoplamento dinâmico resultante, um controlador linear, com realimentação Proporcional-Derivativa, é acrescentado para rejeitar perturbações e corrigir eventuais desvios nas trajetórias de junta especificadas. Assim, conforme é mostrado no diagrama de blocos da figura abaixo, a lei de controle por torque computado envolve as duas etapas descritas a seguir.

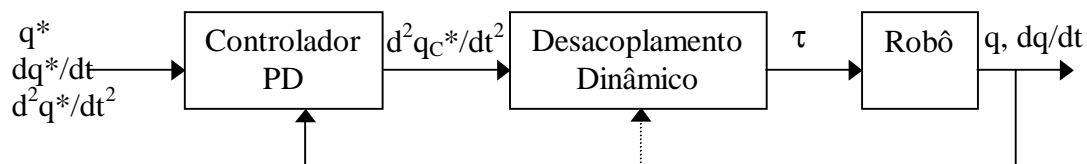


Figura 5.11. Controle por torque computado.

- i) Cálculo da aceleração de comando:

$$d^2q_C/dt^2 = d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)$$

onde  $K_D$  e  $K_P$  são matrizes  $n \times n$  diagonais de ganhos positivos, correspondentes a realimentações derivativas e proporcionais, respectivamente.

- ii) Compensação do modelo dinâmico:

$$\tau = M^*(q) \cdot d^2q_C/dt^2 + \tau_R^*(q, dq/dt)$$

onde,  $\tau$  é o vetor de esforços de junta,  $M^*(q)$  é o modelo nominal disponível para a matriz de inércia e  $\tau_R^*(q, dq/dt) = \tau_C^*(q, dq/dt) + \tau_G^*(q) + \tau_F^*(dq/dt)$  é o modelo nominal disponível para o vetor de reações coriolis, centrífugas, gravitacionais e de atrito.

Assim, a lei de controle por torque computado é dada por:

$$\tau = M^*(q) \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)] + \tau_R^*(q, dq/dt)$$

Substituindo esta lei de controle na equação que descreve dinâmica inversa do manipulador,  $\tau = M(q) \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R(q, dq/dt)$ , obtemos a resposta em malha fechada,

$$M^* \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)] + \tau_R^* = M \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R$$

onde os argumentos dos termos da equação de dinâmica inversa foram omitidos para simplificar a notação. Lembrando que o erro de posicionamento é  $(q^* - q) = e$ , temos:

$$M^* \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D \cdot de/dt + K_P \cdot e] + \tau_R^* = M \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R$$

Subtraindo o termo  $M^* \cdot d^2q^*/dt^2$  dos dois lados da equação acima, obtemos:

$$M^* \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D \cdot de/dt + K_P \cdot e] + \tau_R^* - M^* \cdot d^2q^*/dt^2 = M \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R - M^* \cdot d^2q^*/dt^2$$

$$\Rightarrow M^* \cdot [d^2q^*/dt^2 - d^2q^*/dt^2 + K_D \cdot de/dt + K_P \cdot e] = (M - M^*) \cdot d^2q^*/dt^2 + (\tau_R - \tau_R^*)$$

$$\Rightarrow d^2e/dt^2 + K_D \cdot de/dt + K_P \cdot e = (M^*)^{-1} \cdot [(M - M^*) \cdot d^2q^*/dt^2 + (\tau_R - \tau_R^*)]$$

Observe que o lado esquerdo da equação acima representa uma dinâmica desacoplada de segunda ordem, que é perturbada pelo termo não linear do lado direito da equação, o qual introduz acoplamento dinâmico entre as diversas juntas. Na situação ideal em que o modelo disponível representa exatamente o comportamento dinâmico do manipulador ( $M^* = M$  e  $\tau_R^* = \tau_R$ ), a resposta em malha fechada se reduz a:

$$d^2e/dt^2 + K_D \cdot de/dt + K_P \cdot e = 0$$

ou seja, a dinâmica não linear do manipulador é perfeitamente compensada, desacoplando o controle as juntas e fazendo o erro convergir para zero quando o tempo tende a infinito. Neste caso, a realimentação PD impõe uma dinâmica de segunda ordem ao sistema em malha fechada, onde as matrizes de ganhos proporcionais e derivativos podem ser escolhidas para atender às especificações:

$$K_P = \omega_n^2$$

$$K_D = 2 \cdot \xi \cdot \omega_n$$

Um aspecto importante a ser levado em conta na implementação do controlador por torque computado é o tempo de computação envolvido no cálculo do modelo dinâmico inverso, no estágio de linearização do controlador. Modelos explícitos, em forma fechada são impraticáveis para manipuladores com mais do que duas ou três juntas. Por outro lado, o algoritmo recursivo Newton-Euler permite computar a dinâmica inversa de forma razoavelmente eficiente e, para manipuladores industriais, o esforço computacional requerido por este algoritmo geralmente é relativamente próximo da solução em forma fechada.

Quando a trajetória a ser executada é conhecida a priori, uma abordagem alternativa consiste em computar o modelo dinâmico usando a trajetória de referência,  $q^*$  e  $dq^*/dt$ , em lugar dos valores medidos de posições e velocidades de junta,  $q$  e  $dq/dt$ . Neste caso, os termos  $M(q^*)$  e  $\tau_R(q^*, dq^*/dt)$  do modelo dinâmico inverso podem ser computados previamente, antes da execução da trajetória. Por outro lado, caso a trajetória real se afaste muito da trajetória de referência, o modelo dinâmico inverso assim calculado não compensará completamente a dinâmica do robô real, degradando o processo de linearização e, conseqüentemente, o desempenho do sistema de controle como um todo.

Uma outra alternativa para reduzir o custo computacional deste esquema de controle é utilizar taxas de amostragem diferentes para o laço de realimentação PD e para o cômputo do modelo inverso. Assim, o modelo dinâmico, que tem um custo computacional elevado, pode ser atualizado a uma taxa mais lenta do que aquela utilizada na realimentação PD. Obviamente, o uso de uma taxa de amostragem menor na atualização do modelo dinâmico resulta em um modelo nominal menos preciso, o que pode degradar o desempenho.

Em qualquer das abordagens acima, a imprecisão no modelo dinâmico disponível resulta em um rasteio de trajetória menos preciso do que aquele especificado. O laço de servocontrole PD deverá ser projetado de maneira a ser robusto frente a estes desvios do modelo nominal. Dentro de certos limites de desvio admissíveis em relação ao modelo dinâmico disponível, é possível projetar um conjunto de ganhos constantes que garantam que, apesar da deriva resultante nos pólos de malha fechada, estes permaneçam em uma região de desempenho favorável. Alternativamente, podem ser especificados ganhos variáveis, de modo a minimizar o movimento dos pólos de malha fechada, mantendo o desempenho relativamente constante.

Outro aspecto importante na implementação do controle por torque computado é a taxa de amostragem utilizada na discretização do mesmo. O limite inferior absoluto para a taxa de amostragem é dado pelo espectro do sinal de entrada de referência utilizado. A taxa de amostragem deve ser, no mínimo, duas vezes maior do que a largura de banda da entrada de referência. O limite superior da frequência de amostragem é dado pela capacidade de rejeição de perturbações e pela capacidade de supressão de vibrações mecânicas naturais. Se o período de amostragem é maior do que o tempo de correlação do ruído devido a perturbações randômicas, estas perturbações não serão suprimidas. Assim, uma boa regra empírica é escolher um período de amostragem pelo menos dez vezes menor do que o tempo de correlação do ruído. Para evitar excitar modos de ressonância mecânicos, a taxa de amostragem deve ser, no mínimo, duas vezes maior do que a frequência natural dessas ressonâncias. Uma boa regra empírica é escolher a taxa de amostragem pelo menos dez vezes maior do que a frequência natural de ressonância mecânica.

A complexidade computacional envolvida, aliada à necessidade de dispor de um bom modelo dinâmico e de um conhecimento especializado no projeto do esquema de controle por torque computado, fazem com que este último não seja muito difundido na indústria. Assim, versões de controladores mais simples são utilizadas no controle de robôs comerciais. Apesar de menos precisos, a simplicidade destes controladores torna mais intuitivo o processo de sintonia dos mesmos.

### **Esquema de Controle Independente de Juntas:**

Um esquema extremamente simples de controle, muito popular em robôs manipuladores comerciais é aquele baseado em controladores PD, ou PID, independentes para cada junta do robô. Neste tipo de controlador, não é feita nenhuma compensação do modelo dinâmico do robô. Este controlador pode ser derivado da lei de controle por torque computado fazendo:

$$M^*(q) = I$$

$$\tau_R^*(q, dq/dt) = 0$$

$$\Rightarrow \tau = d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)$$

Assim, a resposta dinâmica em malha fechada é descrita por:

$$d^2e/dt^2 + K_D.de/dt + K_P.e = (M - I).d^2q/dt^2 + \tau_R$$

Como nenhuma compensação de modelo é utilizada e são usados ganhos de realimentação constantes, o desempenho do controlador será variável, dependendo do acoplamento dinâmico entre as juntas e do ponto de operação em que se encontra o braço. Normalmente, os ganhos são projetados para ter um amortecimento crítico quando o manipulador está posicionado no centro do seu espaço de trabalho, resultando em desempenho sub-amortecido ou sobre-amortecido a medida que o robô se afasta desta configuração. A escolha de ganhos de realimentação elevados permite minimizar os efeitos de acoplamento representados pelos termos do lado direito da equação acima. O limite superior para os ganhos é definido por diversos fatores, tais como: taxa de amostragem, ruídos de medição ou ressonâncias mecânicas. Em manipuladores industriais, quando dotados de reduções mecânicas no acionamento das juntas, os efeitos de acoplamento são bastante reduzidos, de modo que este tipo de controlador apresenta um desempenho razoável. Estes controladores também são adequados para aplicações do tipo “pega e coloca”, onde apenas se deseja uma boa precisão no posicionamento final da garra e não é necessário um rasteio preciso de trajetória.

### **Esquema de Controle com Compensação de Inércia Efetiva de Juntas:**

Como geralmente os termos da diagonal da matriz de inércia são mais significativos do que os termos fora da diagonal, um esquema de controle um pouco mais preciso do que o descrito acima, mas ainda relativamente simples de implementar é o controle com compensação de inércia efetiva de junta. Neste esquema a matriz de inércia é modelada de forma simplificada, fazendo  $M^*(q) = M_d^*(q)$ , onde a matriz  $M_d^*(q)$  é obtida computando apenas os elementos da diagonal de  $M(q)$  e desprezando os elementos restantes. Assim, a lei de controle correspondente é derivada da lei de controle por torque computado fazendo:

$$M^*(q) = M_d^*(q)$$

$$\tau_R^*(q, dq/dt) = 0$$

$$\Rightarrow \tau = M_d^*(q) \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)]$$

Assim, a resposta dinâmica em malha fechada é descrita por:

$$d^2e/dt^2 + K_D.de/dt + K_P.e = (M_d^*)^{-1} \cdot [(M - M_d^*) \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R]$$

Este esquema ainda apresenta acoplamento dinâmico entre juntas, mas é mais fácil de ser mantido perto do amortecimento crítico do que o esquema de controle independente de juntas.

### **Esquema de Controle com Desacoplamento de Inércia:**

Um esquema um pouco mais elaborado do que o anterior pode ser obtido compensando os efeitos de acoplamento introduzidos pela matriz de inércia. O esquema de controle com desacoplamento de inércia é derivado da lei de controle por torque computado fazendo:

$$M^*(q) = M^*(q)$$

$$\tau_R^*(q, dq/dt) = 0$$

$$\Rightarrow \tau = M^*(q) \cdot [d^2q^*/dt^2 + K_D(dq^*/dt - dq/dt) + K_P(q^* - q)]$$

Assim, a resposta dinâmica em malha fechada é descrita por:

$$d^2e/dt^2 + K_D.de/dt + K_P.e = (M^*)^{-1} \cdot [(M - M^*) \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R]$$

Neste caso, a adição dos elementos da matriz de inércia fora da diagonal permite obter um melhor desacoplamento do que no caso anterior, o que possibilita um desempenho mais constante ao longo de todo o espaço de trabalho. Como as reações gravitacionais são responsáveis por erros de posicionamento estático, algumas implementações incluem a compensação do vetor  $\tau_G(q)$ . Nestas circunstâncias, se o manipulador opera em baixas velocidades, os termos de reações coriolis e centrífugas e reações de atrito são bastante minimizadas e um bom desempenho pode ser obtido.

### **Controle de junta considerando dinâmica de atuador:**

#### **Dinâmica do Atuador (Motor de Corrente Contínua):**

Considere que cada junta do robô é acionada por um motor de corrente contínua através de uma caixa de redução mecânica. A figura 5.12 mostra o circuito elétrico correspondente a um motor deste tipo, onde:

$V_a$  = tensão do enrolamento de armadura, imposta pelo controlador da junta.

$i_a$  = corrente do enrolamento de armadura.

$R_a$  = resistência do enrolamento de armadura.

$L_a$  = indutância do enrolamento de armadura.

$E$  = força contra-eletromotriz induzida na armadura pelo enrolamento de campo.

$V_f$  = tensão de alimentação do enrolamento de campo.  
 $i_f$  = corrente do enrolamento de campo.  
 $R_f$  = resistência do enrolamento de campo.  
 $L_f$  = indutância do enrolamento de campo.  
 $\tau_e$  = torque elétrico gerado pelo motor  
 $\theta_m$  = posição angular do eixo do motor.  
 $I_m$  = Momento de inércia do rotor do motor.  
 $K_{am}$  = coeficiente de atrito nos mancais do rotor do motor.

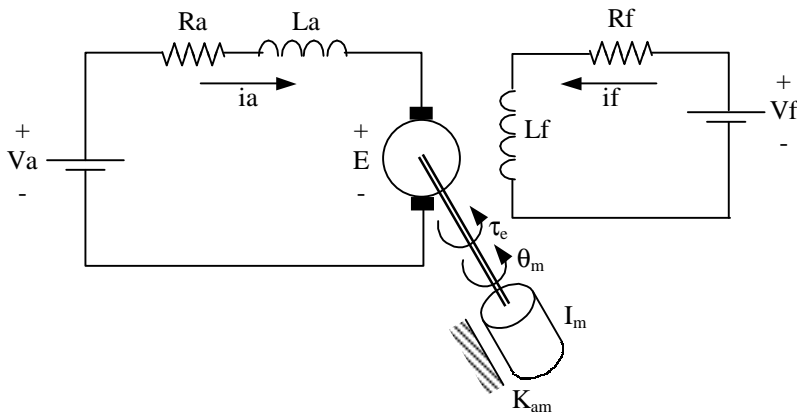


Figura 5.12. Circuito elétrico de um motor de corrente contínua.

Quando a corrente de campo é fixa, o torque elétrico gerado pelo motor é proporcional à corrente de armadura e a força contra-eletromotriz é proporcional à velocidade do rotor. Nestas condições, o motor de corrente contínua pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações:

$$V_a = R_a \cdot i_a + L_a \cdot \frac{di_a}{dt} + E$$

$$E = K_e \cdot \frac{d\theta_m}{dt}$$

$$\tau_e = K_t \cdot i_a$$

onde  $K_e$  é a constante de força contra-eletromotriz do motor e  $K_t$  é a constante de torque do motor.

O motor deve desenvolver um torque elétrico,  $\tau_e$ , de modo a vencer o torque resistente imposto no eixo da junta pela carga,  $\tau_L$ , e o torque resistente no eixo do rotor inerente ao próprio motor,  $\tau_m$ . Na nossa análise, assumiremos que a carga externa possui um momento de inércia  $I_L$  e que os mancais do eixo da junta produzem um atrito caracterizado pelo coeficiente  $K_{aL}$ . A figura 5.13 mostra o acoplamento mecânico entre o eixo do motor e o eixo da junta, implementado através de uma caixa de redução constituída por duas engrenagens: uma acoplada ao eixo do motor, de raio  $r_m$  com  $N_m$  dentes, que aciona uma outra acoplada ao eixo da junta, de raio  $r_L$  com  $N_L$  dentes, onde  $N_m < N_L$ . Considerando que os dentes das duas engrenagens possuem aproximadamente o mesmo tamanho, os raios da engrenagens são proporcionais ao número de dentes das mesmas.

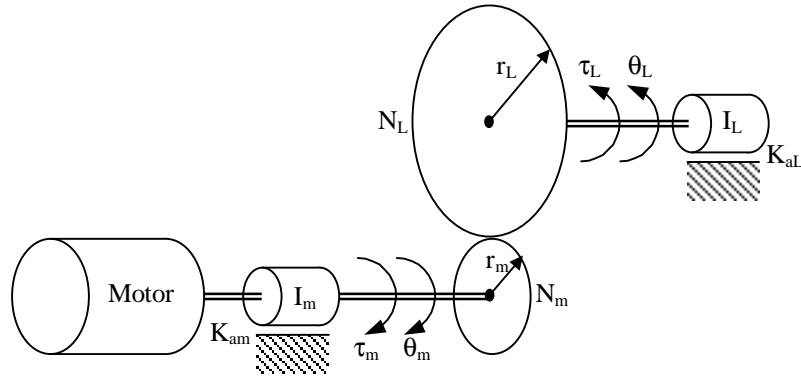


Figura 5.13. Acoplamento mecânico entre o motor e o eixo da junta.

Nestas condições, devido ao acoplamento mecânico, o arco de círculo percorrido por um dente da engrenagem do eixo do rotor é igual ao arco percorrido por um dente da engrenagem do eixo da junta, ou seja:

$$r_m \cdot \theta_m = r_L \cdot \theta_L$$

Como os raios das engrenagens são proporcionais ao número de dentes das mesmas,

$$N_m \cdot \theta_m = N_L \cdot \theta_L$$

Definindo a relação de engrenagens como  ${}^L K_m = N_m/N_L$ , temos:

$$\theta_L = {}^L K_m \cdot \theta_m$$

Onde  ${}^L K_m < 1$ , portanto, o eixo do motor gira mais do que o eixo da junta. Derivando a expressão acima, obtemos a relação entre a velocidade do eixo da junta e a velocidade do motor, bem como entre a aceleração do motor e a aceleração da junta:

$$d\theta_L/dt = {}^L K_m \cdot d\theta_m/dt$$

$$d^2\theta_L/dt^2 = {}^L K_m \cdot d^2\theta_m/dt^2$$

O torque resistente imposto no eixo da junta pela carga,  $\tau_L$ , é função da inércia da mesma e do atrito nos mancais da junta. Assim, modelaremos  $\tau_L$  como:

$$\tau_L = I_L \cdot d^2\theta_L/dt^2 + K_{al} \cdot d\theta_L/dt$$

De forma análoga, O torque resistente imposto no eixo do motor pelo próprio rotor,  $\tau_m$ , é função da inércia do mesmo e do atrito nos seus mancais. Assim, modelaremos  $\tau_m$  como:

$$\tau_m = I_m \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{am} \cdot d\theta_m/dt$$

O torque resistente introduzido pela carga no eixo da junta,  $\tau_L$ , é transmitido pela caixa de redução para o eixo do motor, resultando no torque da carga referido ao eixo do motor,  ${}^m\tau_L$ . Desprezando as perdas de energia mecânica nas engrenagens, o trabalho exercido no eixo da junta deve ser igual ao trabalho exercido no eixo do rotor. Assim:

$$\theta_m \cdot {}^m\tau_L = \theta_L \cdot \tau_L$$

Substituindo  $\theta_L$  por  ${}^L K_m \cdot \theta_m$ , temos:

$$\theta_m \cdot {}^m\tau_L = {}^L K_m \cdot \theta_m \cdot \tau_L$$

$$\Rightarrow {}^m\tau_L = {}^L K_m \cdot \tau_L$$

Ou seja, para exercer um torque elevado no eixo da junta, o motor precisa desenvolver um torque  ${}^m\tau_L$  pequeno, graças à redução mecânica. Por outro lado, o rotor precisa girar mais rápido do que o eixo da junta, na proporção inversa em que o torque é reduzido. O motor deve desenvolver um torque elétrico capaz de vencer não só o torque resistente introduzido pela carga, mas também o torque resistente introduzido pelo próprio rotor. Assim:

$$\tau_e = \tau_m + {}^m\tau_L = \tau_m + {}^L K_m \cdot \tau_L$$

Substituindo as expressões para  $\tau_m$  e  $\tau_L$ , temos:

$$\tau_e = I_m \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{am} \cdot d\theta_m/dt + {}^L K_m \cdot (I_L \cdot d^2\theta_L/dt^2 + K_{aL} \cdot d\theta_L/dt)$$

Substituindo a velocidade e a aceleração da junta pela velocidade e aceleração correspondente no eixo do rotor, (obtidas através da relação de engrenagens), temos:

$$\tau_e = I_m \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{am} \cdot d\theta_m/dt + {}^L K_m \cdot (I_L \cdot {}^L K_m \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{aL} \cdot {}^L K_m \cdot d\theta_m/dt)$$

$$\Rightarrow \tau_e = I_m \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{am} \cdot d\theta_m/dt + ({}^L K_m)^2 \cdot (I_L \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{aL} \cdot d\theta_m/dt)$$

Na expressão acima, percebe-se que os efeitos dinâmicos da carga são reduzidos pelo quadrado da relação de engrenagens, quando referidos ao eixo do motor. Definindo a inércia efetiva da junta e o coeficiente de atrito efetivo como, respectivamente:

$$I_e = I_m + ({}^L K_m)^2 \cdot I_L$$

$$K_{ae} = K_{am} + ({}^L K_m)^2 \cdot K_{aL}$$

então, o torque elétrico desenvolvido pelo motor deve ser igual a:

$$\tau_e = I_e \cdot d^2\theta_m/dt^2 + K_{ae} \cdot d\theta_m/dt$$

Tomando a transformada de Laplace do modelo elétrico e do modelo mecânico da junta, temos:



$$i_a(s) = [V_a(s) - s.K_e.\theta_m(s)]/[R_a + s.L_a]$$

$$\tau_e(s) = s^2.I_e.\theta_m(s) + s.K_{ae}.\theta_m(s) = [s^2.I_e + s.K_{ae}].\theta_m(s)$$

Como o torque elétrico desenvolvido pelo motor é proporcional à corrente de armadura,  $\tau_e(s) = K_t.i_a(s)$ , temos que a função de transferência em malha aberta do sistema é dada por:

$$\theta_m(s)/V_a(s) = K_t/(s[(I_e.L_a)s^2 + (L_a.K_{ae}+R_a.I_e)s + (R_a.K_{ae}.K_t.K_e)])$$

Como a constante de tempo elétrica é muito menor do que a constante de tempo mecânica do sistema, o efeito indutivo introduzido pela indutância  $L_a$  geralmente pode ser desprezado. Assim, a função de transferência é simplificada para:

$$\theta_m(s)/V_a(s) = K_t/(s[(R_a.I_e)s + (R_a.K_{ae}.K_t.K_e)])$$

$$\Rightarrow \theta_m(s)/V_a(s) = K_m/(s[(T_m).s + 1])$$

onde a função de transferência apresenta um pólo na origem e outro em  $s = -1/T_m$ , sendo a constante de ganho do motor,  $K_m$ , e a constante de tempo do motor  $T_m$ , dadas respectivamente por:

$$K_m = K_t/(R_a.K_{ae}.K_t.K_e)$$

$$T_m = R_a.I_e/(R_a.K_{ae}.K_t.K_e)$$

Como a saída medida geralmente é o ângulo da junta  $\theta_L$ , de forma equivalente, temos:

$$\theta_L(s)/V_a(s) = {}^L K_m.K_t/(s[(R_a.I_e)s + (R_a.K_{ae}.K_t.K_e)])$$

A figura 5.14 mostra o diagrama de blocos da função de transferência em malha aberta.

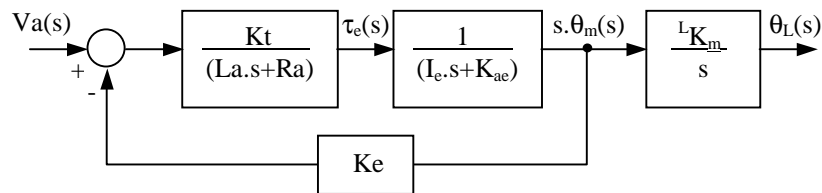


Figura 5.14. Função de transferência em malha aberta de uma junta do robô.

## Controle independente de junta por realimentação PD:

Para implementar o controle de posição da junta, utilizaremos uma simples realimentação proporcional-derivativa (PD):

$$V_a(t) = [K_P \cdot (\theta_L^*(t) - \theta_L(t)) + K_D \cdot (d\theta_L^*(t)/dt - d\theta_L(t)/dt)] / ({}^L K_m)$$

$$\Rightarrow V_a(t) = [K_P \cdot e(t) + K_D \cdot de(t)/dt] / ({}^L K_m)$$

onde o ganho proporcional  $K_P$  e o ganho derivativo  $K_D$  são positivos e devem ser projetados de modo a que o erro de rasteio de trajetória,  $e(t) = \theta_L^*(t) - \theta_L(t)$ , convirja para zero quando o tempo  $t$  tende a infinito. Expressando a lei de controle no domínio da transformada de Laplace, temos:

$$V_a(s) = [K_P + K_D \cdot s] \cdot e(s) / ({}^L K_m)$$

A figura 5.15 mostra o diagrama de blocos da função de transferência do sistema em malha fechada usando o controlador PD descrito acima. Na figura, foi introduzido o torque de perturbação,  $\tau_P(s)$ , para descrever efeitos dinâmicos não modelados. Estas perturbações envolvem as reações inerciais, coriolis, centrífugas, gravitacionais e de atrito devidas ao acoplamento mecânico com as outras juntas do manipulador. Espera-se que estas reações sejam razoavelmente atenuadas pela redução mecânica introduzida pelas engrenagens.

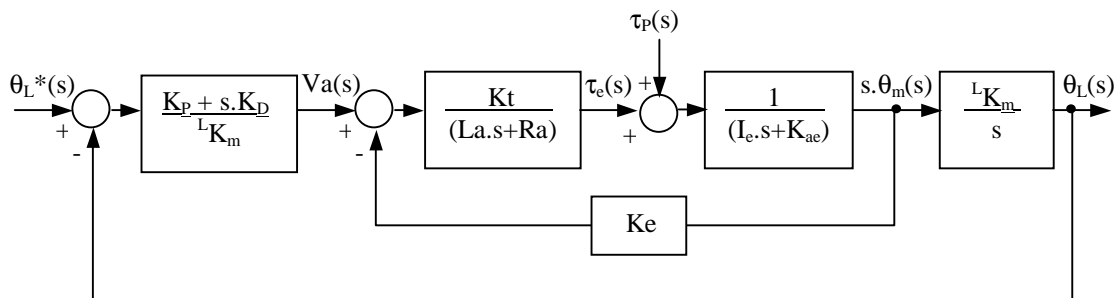


Figura 5.15. Função de transferência em malha fechada com realimentação PD.

Assim, a função de transferência em malha fechada entre entrada e saída, considerando a perturbação  $\tau_P(s)$  igual a zero, é dada por:

$$\theta_L(s) / \theta_L^*(s) = [(K_t \cdot K_D) \cdot s + (K_t \cdot K_P)] / [(R_a \cdot I_e) \cdot s^2 + (R_a \cdot K_{ae} + K_t \cdot K_e + K_t \cdot K_D) \cdot s + (K_t \cdot K_P)]$$

Verifica-se que a função de transferência acima representa um sistema de Segunda ordem com um zero em  $s = -K_P/K_D$ . De forma análoga, a função de transferência em malha fechada entre perturbação e saída, considerando a entrada  $\theta_L^*(s)$  igual a zero, é dada por:

$$\theta_L(s) / \tau_P(s) = [{}^L K_m \cdot R_a] / [(R_a \cdot I_e) \cdot s^2 + (R_a \cdot K_{ae} + K_t \cdot K_e + K_t \cdot K_D) \cdot s + (K_t \cdot K_P)]$$

Do denominador das funções de transferência acima, comparando com um sistema de segunda ordem padrão, verificamos que a frequência natural e o coeficiente de amortecimento podem ser obtidos a partir das seguintes igualdades:

$$\omega_n^2 = (K_t \cdot K_P) / (R_a \cdot I_e)$$

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = (R_a \cdot K_{ae} + K_t \cdot K_e + K_t \cdot K_D) / (R_a \cdot I_e)$$

A partir destas expressões, podemos escolher os ganhos do controlador de modo a impor uma dinâmica de segunda ordem especificada por  $\xi$  e  $\omega_n$ . Da primeira expressão, temos:

$$K_P = (R_a \cdot I_e \cdot \omega_n^2) / K_t > 0$$

Da segunda expressão e utilizando o valor de  $K_P$  obtido acima, para um coeficiente de amortecimento  $\xi \geq 1$ , (sistema criticamente amortecido ou sobre-amortecido), temos:

$$\xi = [R_a \cdot K_{ae} + K_t \cdot K_e + K_t \cdot K_D] / [2 \cdot (K_t \cdot K_P \cdot R_a \cdot I_e)^{1/2}] \geq 1$$

$$\Rightarrow K_D \geq [2 \cdot (K_t \cdot K_P \cdot R_a \cdot I_e)^{1/2} - R_a \cdot K_{ae} - K_t \cdot K_e] / K_t$$

Um limite superior para o ganho  $K_P$  pode ser obtido se for imposta alguma restrição adicional, como, por exemplo, a rejeição a vibrações mecânicas. Tal tipo de fenômeno ocorre devido a que os componentes mecânicos, idealmente rígidos, sempre apresentam algum grau de flexibilidade. Se considerarmos que o eixo da junta não é totalmente rígido, caracterizado por um coeficiente de dureza  $K_{dur}$ , então, um torque restaurador proporcional ao deslocamento angular da junta se oporá ao torque inercial. Assim:

$$I_e \cdot d^2 \theta_m / dt^2 + K_{dur} \cdot \theta_m = 0$$

Tomando a transformada de Laplace desta expressão, obtemos a equação característica que descreve o comportamento não rígido da junta:

$$I_e \cdot s^2 + K_{dur} = 0$$

A raiz positiva desta equação nos fornece a frequência de ressonância mecânica da junta,  $\omega_r$ :

$$\omega_r = (K_{dur} / I_e)^{1/2}$$

onde verificamos que a frequência de ressonância mecânica diminui quando a carga, representada pelo momento de inércia  $I_e$ , aumenta. Para não excitar oscilações mecânicas naturais, recomenda-se que  $\omega_n$  seja escolhida, no mínimo, menor do que a metade de  $\omega_r$ . Assim, os ganhos  $K_P$  e  $K_D$  devem ser escolhidos dentro dos limites:

$$0 < K_P < (R_a \cdot I_e \cdot \omega_r^2) / (4 \cdot K_t)$$

$$K_D \geq (R_a \cdot I_e \cdot \omega_r - R_a \cdot K_{ae} - K_t \cdot K_e) / K_t$$

### Erro em regime permanente:

O erro de rasteio de trajetória no domínio da transformada de Laplace pode ser obtido a partir do diagrama de blocos do sistema em malha fechada:

$$e(s) = \theta_L^*(s) - \theta_L(s) = N(s)/D(s)$$

onde,

$$N(s) = [(Ra.I_e).s^2 + (Ra.K_{ae} + Kt.Ke).s].\theta_L^*(s) + [{}^L K_m.Ra].\tau_P(s)$$

$$D(s) = [(Ra.I_e).s^2 + (Ra.K_{ae} + Kt.Ke + Kt.K_D).s + (Kt.K_P)]$$

Considerando uma entrada em degrau,  $\theta_L^*(s) = A/s$ , o erro em regime permanente,  $e_{rp}$ , pode ser obtido através do teorema do valor final:

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0}(s.e(s)) = \lim_{s \rightarrow 0}[(s.{}^L K_m.Ra.\tau_P(s))/D(s)]$$

Considerando que o torque de perturbações pode ser modelado como uma soma de reações coriolis, centrífugas, gravitacionais e outras, temos:

$$\tau_P(t) = \tau_C(t) + \tau_G(t) + \tau_0$$

onde  $\tau_0$  é um limite superior absoluto para perturbações correspondentes a reações não modeladas. Normalmente,  $\tau_0$  é pequeno em relação às outras reações. Assim, tomando a transformada de Laplace da expressão acima, obtemos:

$$\tau_P(s) = \tau_C(s) + \tau_G(s) + \tau_0/s$$

Substituindo esta expressão no erro de regime permanente, temos:

$$e_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0}[(s.{}^L K_m.Ra.(\tau_C(s) + \tau_G(s) + \tau_0/s))/D(s)]$$

Em controle de posição,  $\tau_C(t)$  tende a zero quando  $t$  tende a infinito, visto que é função das velocidades ao quadrado. Assim, se os torques gravitacionais forem compensados, temos:

$$e_{rp} = {}^L K_m.Ra.\tau_0/(Kt.K_P)$$

Como  $\tau_0$  geralmente é pequeno e  $K_P$  pode ser escolhido razoavelmente grande, o erro de regime permanente resultante é bastante reduzido.

## 5.4. Controle de Esforços:

Em tarefas nas quais a ferramenta do robô manipulador entra em contato com objetos presentes no espaço de trabalho, o uso de controle de posição puro pode não ser adequado. Por exemplo, na tarefa de polir uma superfície, pequenos erros de posição na direção ortogonal à superfície podem resultar em perda de contato da ferramenta com a mesma. Claramente, algum controle de força na direção ortogonal é requerido de modo a garantir que um contato adequado seja mantido, enquanto a posição ao longo da superfície é controlada.

### Referencial de Tarefa:

Um Referencial de Tarefa {T} é definido de forma a que a tarefa a ser realizada possa ser facilmente descrita no mesmo. O referencial de tarefa é um sistema de coordenadas ortogonal, tal que, a cada instante e ao longo de cada eixo, a tarefa possa ser descrita exclusivamente como um problema de controle de trajetória ou de esforço. Assim, ao longo dos eixos em que se realiza controle de trajetória não se pode controlar simultaneamente o esforço e vice-versa. Esta dualidade pode ser expressa em termos de Restrições Naturais e Restrições Artificiais. A figura 5.16 mostra as restrições naturais e artificiais para a tarefa de inserir um pino em um furo cilíndrico.

Restrições Naturais	Restrições Artificiais
$v_x = 0$	$f_x = 0$
$v_y = 0$	$f_y = 0$
$f_z = 0$	$v_z = 0$
$\omega_x = 0$	$\tau_x = 0$
$\omega_y = 0$	$\tau_y = 0$
$\tau_z = 0$	$\omega_z = 0$

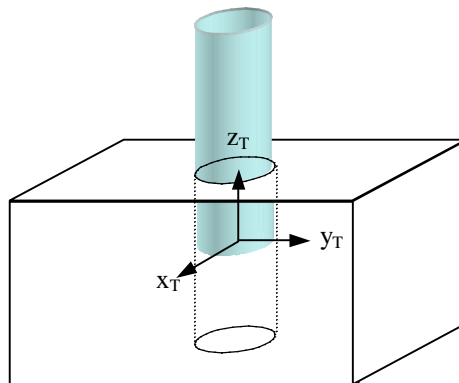


Figura 5.16. Restrições naturais e artificiais na tarefa de inserir um pino em um furo.

### Controle passivo de impedância mecânica:

Para executar tarefas específicas, alguns sistemas realizam o controle de força através de simples componentes mecânicos passivos, (molas e amortecedores), acoplados à ferramenta, de modo a produzir diferentes durezas nos diferentes eixos de movimento, de acordo com a tarefa a ser realizada. A garra com centro de complacência remoto (*remote center compliance*) é um exemplo deste tipo de mecanismos passivos para controle de forças, usado para tarefas de inserção de pinos. Neste sistema, através do uso apropriado de molas e amortecedores, impõe-se um centro de complacência remoto na ponta do pino. O centro de complacência é um ponto do mecanismo tal que uma força aplicada no mesmo causa apenas uma translação pura, enquanto que um torque aplicado nesse ponto causa apenas uma rotação pura. Um centro de complacência remoto representa um ponto naturalmente adequado para definir a origem do referencial de tarefa.

Os elementos passivos acoplados à garra produzem um grau de dureza (ou, de forma equivalente, o seu inverso, um grau de complacência), em cada direção de movimento, de forma que, dado um esforço generalizado  $F$  aplicado na ponta da ferramenta, a localização da mesma,  $X$ , sofrerá um desvio da localização especificada  $X^*$ , que é dado por:

$$\Delta X = X^* - X = K.F$$

onde  $K$  é uma matriz diagonal, para a qual cada elemento da diagonal  $K_i$  é imposto pelos elementos mecânicos passivos de modo a implementar uma maior ou menor dureza na direção correspondente, ( $K_i = K_{\text{duro}}$  ou  $K_i = K_{\text{mole}}$ ), de acordo com a tarefa.

Sistemas deste tipo são relativamente baratos e apresentam resposta rápida. Por outro lado, estes esquemas pecam pela sua pouca versatilidade e sua aplicação é restrita a tarefas específicas. Para cada tarefa diferente deve-se mudar o *hardware* mecânico correspondente.

### **Controle ativo de impedância mecânica:**

Os sistemas de controle ativo permitem modificar a impedância mecânica apresentada pela garra em contato com um objeto através da imposição de uma adequada dureza nas juntas (ou, de forma equivalente, seu inverso, a complacência de juntas), por meio dos servocontroladores das mesmas. Pelo fato da impedância mecânica da garra poder ser imposta através do *software* de controle das juntas do robô, estes esquemas são muito mais flexíveis do que aqueles baseados em componentes mecânicos passivos. Se a tarefa é mudada, em lugar de alterar o *hardware* da garra, basta alterar os ganhos do controlador, adequando-os à nova tarefa.

### **Controle de Dureza:**

Considere o problema de impor, por *software*, uma dureza desejada na ferramenta do robô. O comportamento elástico desejado pode ser descrito por uma Matriz de Dureza,  $K^*$ , expressa em espaço de tarefa. Seja a localização da ferramenta dada por um vetor de manipulação  $X$ . O esforço restaurador  $F$  a ser gerado pela garra em resposta a um pequeno deslocamento  $\Delta X = X^* - X$  em relação à localização desejada  $X^*$ , é dada por:

$$F = -K^*.\Delta X$$

Lembrando que a relação entre esforços em espaço de juntas e esforços em espaço cartesiano e a relação entre pequenos deslocamentos de juntas e seus correspondentes deslocamentos cartesianos são:

$$\tau = J^T.F$$

$$\Delta X = J.\Delta q$$

onde  $J = J(q)$  é o jacobiano e  $\Delta q = q^* - q$  é o pequeno deslocamento de juntas correspondente a  $\Delta X$ . Então, temos que o vetor de esforços de juntas correspondente a  $F$  é dado por:

$$\tau = -J^T \cdot K^* \cdot J \cdot \Delta q$$

A lei de controle de força por impedância ativa descrita por esta expressão é denominada Controle de Dureza ou Controle de Complacência. (A inversa da matriz de dureza é chamada de Matriz de Complacência).

### Controle de impedância mecânica

O controle ativo de impedância mecânica é um esquema de controle de esforços, baseado em realimentação de forças e conjugados através de sensores localizados na garra, além de sensores de posição. A lei de controle fornece o valor dos esforços aplicados pelos atuadores de junta de modo a garantir uma impedância mecânica especificada para a garra em contato com um objeto do espaço de trabalho, conforme mostra a figura 5.17.

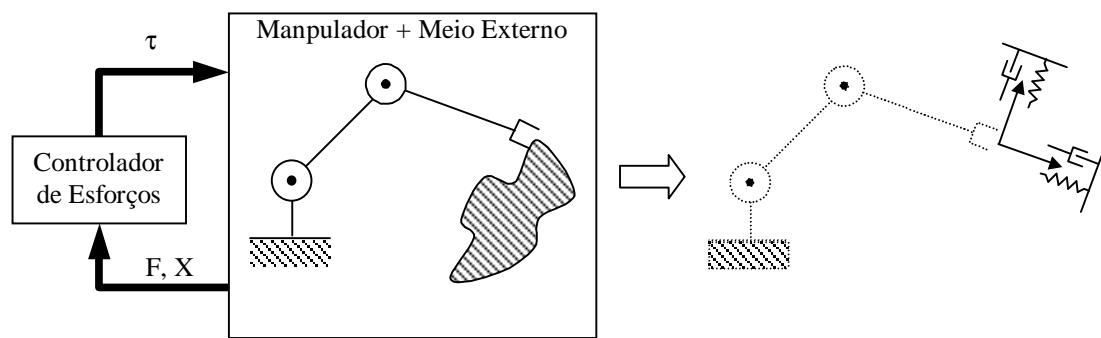


Figura 5.18. Controle ativo de impedância mecânica.

Neste esquema, especifica-se uma dada impedância mecânica desejada para o contato entre a garra e o objeto manipulado. Assim, em malha fechada, deseja-se que o sistema constituído pelo robô e o objeto manipulado apresente uma resposta dinâmica:

$$M^* \cdot d^2 X / dt^2 + D^* \cdot d(X^* - X) / dt + K^* (X^* - X) = F$$

onde:

$F$  = esforço externo sobre a garra.

$M^*$  = Inércia especificada para o sistema em malha fechada.

$D^*$  = Amortecimento especificado para o sistema em malha fechada.

$K^*$  = Dureza especificada para o sistema em malha fechada.

As matrizes  $M^*$ ,  $D^*$  e  $K^*$  são simétricas e não negativas definidas. Uma escolha simples é fazer as matrizes diagonais, com os elementos da diagonal especificados de modo a levar em conta as direções para as quais se deseja uma alta ou baixa impedância mecânica.

Uma lei de controle capaz de impor a dinâmica de malha fechada desejada pode ser derivada de forma semelhante ao esquema de controle de posição por torque computado, incluindo compensação do modelo dinâmico e realimentação proporcional derivativa. Para desenvolver esta lei de controle, é necessário expressar o modelo dinâmico em espaço cartesiano. O modelo dinâmico do robô em espaço de juntas, levando em conta o esforço externo  $F$  sobre a garra, é dado por:

$$\tau + J(q)^T \cdot F = M(q) \cdot d^2q/dt^2 + \tau_R(q, dq/dt)$$

onde, para simplificar a notação, as reações coriolis, centrífugas, gravitacionais e de atrito foram agrupadas no vetor:

$$\tau_R(q, dq/dt) = \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)$$

Multiplicando a equação de dinâmica inversa pela inversa da matriz de jacobiano,  $(J(q)^T)^{-1}$ , e expressando as acelerações de juntas em função das acelerações em espaço cartesiano,  $(d^2q/dt^2 = J(q)^{-1} \cdot [d^2X/dt^2 - dJ(q)/dt \cdot dq/dt])$ , temos a representação equivalente em espaço cartesiano da dinâmica do manipulador:

$$(J(q)^T)^{-1} \cdot \tau + F = M_X(q) \cdot d^2X/dt^2 + \tau_{RX}(q, dq/dt)$$

onde:

$$M_X(q) = (J(q)^T)^{-1} \cdot M(q) \cdot (J(q))^{-1}$$

$$\tau_{RX}(q, dq/dt) = (J(q)^T)^{-1} \cdot \tau_R(q, dq/dt) - M_X(q) \cdot dJ(q)/dt \cdot dq/dt$$

A lei de controle de esforços baseada em compensação do modelo dinâmico e realimentação PD é dada por:

$$\tau = J^T \cdot [\tau_{RX} - M_X \cdot (M^*)^{-1} \cdot (D^* \cdot d(X^* - X)/dt + K^*(X^* - X)) + (M_X \cdot (M^*)^{-1} - I) \cdot F]$$

Onde os argumentos das funções foram omitidos para simplificar a notação. Pode-se facilmente verificar que, em malha fechada, esta lei de controle impõe a impedância dinâmica desejada, especificada por  $M^*$ ,  $D^*$  e  $K^*$ . Se não for requerido que  $M^*$  seja diagonal e constante, pode-se fazer  $M^* = M_X(q)$ . Desta forma, a lei de controle é simplificada para:

$$\tau = \tau_R - M \cdot J^{-1} \cdot dJ(q)/dt \cdot dq/dt - J^T \cdot [D^* \cdot d(X^* - X)/dt + K^*(X^* - X) - (K_{fd} - I) \cdot F]$$

onde a matriz diagonal de ganhos positivos  $K_{fd}$  foi introduzida para compensar a impossibilidade de desacoplar  $M_X(q)$ . Por exemplo, pode-se impor uma impedância mecânica grande (pequena) em uma determinada direção estabelecendo um valor pequeno (grande) para o elemento correspondente da diagonal de  $K_{fd}$ . Esta lei de controle impõe a seguinte dinâmica de malha fechada:

$$M_X \cdot d^2X/dt^2 + D^* \cdot d(X^* - X)/dt + K^*(X^* - X) = K_{fd} \cdot F$$



Em baixas velocidades, as reações coriolis, centrífugas e de atrito componentes do vetor  $\tau_{RX}$  são pequenas e podem ser desprezadas. Nestas condições, apenas as reações gravitacionais predominam em  $\tau_{RX}$ . Se os termos proporcionais à velocidade forem desprezados, a lei de controle é simplificada para:

$$\tau = -J^T.[D^*.d(X^*-X)/dt + K^*(X^*-X) - (K_{fd} - I).F]$$

que consiste em uma simples lei de realimentação linear de posição, velocidade e força, cujo desempenho em malha fechada vai depender das reações gravitacionais, as quais introduzem um acoplamento não linear considerável.

Se nesta lei de controle simplificada fizermos ainda  $D^* = 0$  e  $K_{fd} = I$ , lembrando que para  $\Delta X$  pequeno podemos aproximar  $\Delta X = J.\Delta q$ , a lei de controle fica reduzida a:

$$\tau = -J^T.K^*.J.\Delta q$$

que é a Lei de Controle de Dureza descrita anteriormente.

### Controle Híbrido de Esforço e Posição:

Em determinadas tarefas é necessário que o manipulador se desloque enquanto a garra aplica um esforço sobre algum objeto do espaço de trabalho, (por exemplo: ao lixar ou polir uma superfície, ao cortar uma peça, etc.). Assim, ao longo de certas direções é necessário implementar o controle de posição, enquanto que para outras direções deve se controlar o esforço aplicado pela ferramenta sobre a peça. No esquema de controle híbrido mostrado na figura abaixo, a matriz de restrições  $S$  e o seu complemento  $(I - S)$  implementam o chaveamento dos sinais de controle nas diferentes direções de translação e rotação, implementando o controle híbrido.

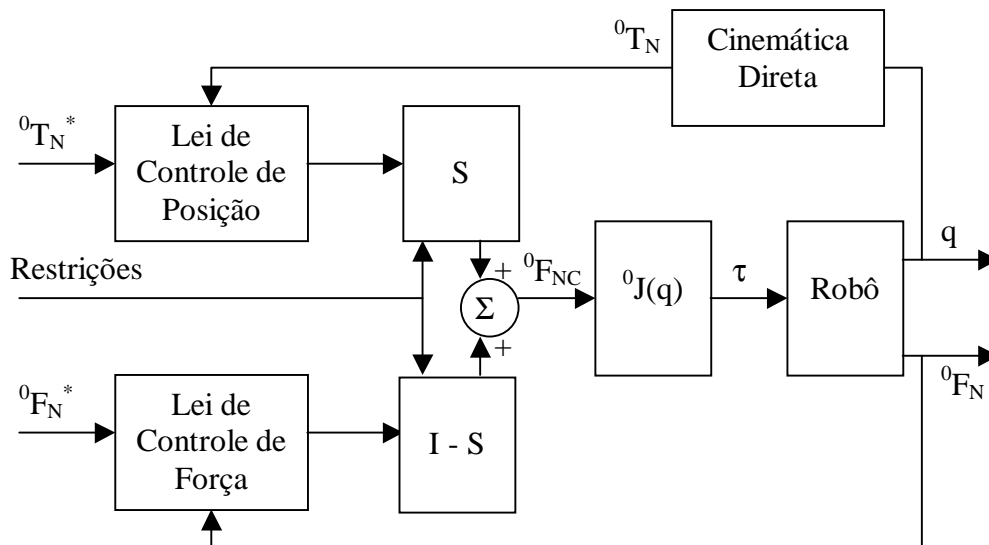


Figura 5.19. Controle híbrido de esforço e posição.