

## 4. ESTÁTICA E DINÂMICA

Neste capítulo abordamos a relação entre o movimento do robô manipulador e os esforços correspondentes que o produzem. Inicialmente analisamos as relações entre esforços estáticos, ou seja, com o manipulador parado. Em particular, descrevemos o mapeamento entre os esforços na ferramenta, (especificados em espaço cartesiano), e os esforços correspondentes aplicados pelos atuadores nas juntas. Como veremos adiante, existe uma dualidade entre este problema e o problema do mapeamento de velocidades entre espaço cartesiano e espaço de juntas, abordado previamente. Assim, o mapeamento entre esforços estáticos é definido através da matriz jacobiana do robô, de forma análoga ao que ocorre no mapeamento entre velocidades.

A resposta dinâmica do robô, ou seja, a trajetória descrita pelo mesmo em função dos esforços aplicados nas juntas, depende das características estruturais do mesmo, as quais podem ser quantificadas através de parâmetros cinemáticos e de parâmetros dinâmicos. Os primeiros foram discutidos no Capítulo 2, de modo que neste capítulo definiremos os parâmetros dinâmicos, que descrevem de forma quantitativa como a massa está distribuída nos elos que compõem o manipulador.

O problema de Dinâmica Inversa, ligado diretamente ao problema de controle do manipulador, consiste em determinar os esforços nos atuadores, dadas as acelerações, velocidades e posições das juntas correspondentes. Mostraremos como resolver este problema através do algoritmo recursivo Newton-Euler. O problema de Dinâmica Direta, fundamental em aplicações que envolvem a simulação dinâmica do robô manipulador, consiste em determinar a resposta dinâmica do mesmo, ou seja a evolução temporal das posições e velocidades das juntas em função dos esforços aplicados pelos atuadores. Veremos que a dinâmica do robô é descrita por um sistema de equações diferenciais de Segunda ordem, não lineares e acopladas, que tornam extremamente complexo o seu controle.

### 4.1. Estática:

#### Equilíbrio de Esforços Estáticos em um Elo:

Considere um manipulador cuja ferramenta está estática, (sem se movimentar), exercendo esforços (forças/conjugados) sobre um objeto no espaço de trabalho. Estes esforços são devidos a esforços correspondentes aplicados pelos atuadores diretamente nas juntas. De modo análogo, quando determinados esforços externos são aplicados sobre a ferramenta, estes se propagam ao longo da estrutura do robô até a base do mesmo, exceto no eixo das juntas, onde os atuadores devem gerar esforços resistentes adequados para manter o manipulador estático.

Para uma junta  $i$ , definimos  $\tau_i$  como o esforço aplicado pelo atuador da mesma. Se a junta  $i$  for rotacional,  $\tau_i$  é o torque aplicado pelo seu atuador em torno do eixo  $z_i$ . Se a junta  $i$  for prismática,  $\tau_i$  é a força aplicada pelo seu atuador ao longo do eixo  $z_i$ . Definimos o vetor  $f_i = [f_{x_i} \ f_{y_i} \ f_{z_i}]^T$  como o vetor  $3 \times 1$  de forças  $f_{x_i}$ ,  $f_{y_i}$  e  $f_{z_i}$ , ao longo dos eixos  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ , respectivamente, aplicadas pelo elo  $\{i-1\}$  sobre o elo  $\{i\}$ . Analogamente, definimos o vetor  $n_i = [n_{x_i} \ n_{y_i} \ n_{z_i}]^T$  como o vetor  $3 \times 1$  de conjugados  $n_{x_i}$ ,  $n_{y_i}$ ,  $n_{z_i}$ , em torno dos eixos  $x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$ , respectivamente, aplicados pelo elo  $\{i-1\}$  sobre o elo  $\{i\}$ .

Em uma situação de equilíbrio estático, os esforços  $f_{i+1}$  e  $n_{i+1}$  aplicados pelo elo  $\{i\}$  sobre o elo  $\{i+1\}$  correspondem, pela Lei de Ação e Reação, a esforços de mesmo módulo, mas sentido contrário, aplicados pelo elo  $\{i+1\}$  sobre o elo  $\{i\}$ , conforme o diagrama de corpo livre mostrado na figura abaixo.

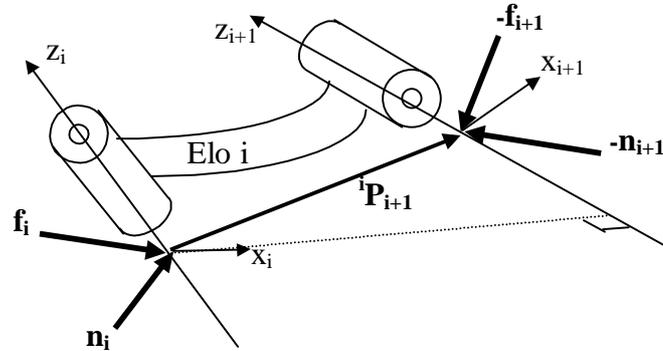


Figura 4.1. Diagrama de corpo livre para um elo  $\{i\}$  em equilíbrio estático.

Assim, para o corpo livre mostrado na figura acima, temos os seguintes balanços de forças e conjugados (expressos no referencial do elo  $\{i\}$ ):

Balanço de forças: 
$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0$$

Balanço de Conjugados: 
$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0$$

Expressando forças e conjugados no seu próprio referencial de elo, temos as seguintes equações recursivas:

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1}$$

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times ({}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1}) \Rightarrow {}^i n_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + [{}^i P_{i+1} \times] \cdot {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1}$$

Se a junta  $i$  for rotacional, para resistir à componente de conjugado  $n_{zi}$  em torno do eixo  $z_i$ , o atuador correspondente deve gerar um torque motor que equilibre  $n_{zi}$ :

$$\tau_i = n_{zi} \quad \Rightarrow \quad \tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i n_i \quad (\text{junta } i \text{ rotacional})$$

Se a junta  $i$  for prismática, para resistir à componente de força  $f_{zi}$  ao longo do eixo  $z_i$ , o atuador correspondente deve gerar um torque motor que equilibre  $f_{zi}$ :

$$\tau_i = f_{zi} \quad \Rightarrow \quad \tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i f_i \quad (\text{junta } i \text{ prismática})$$

A partir das equações acima, conhecendo os esforços aplicados na garra,  ${}^{N+1} n_{N+1}$  e  ${}^{N+1} f_{N+1}$ , é possível determinar recursivamente, da ferramenta para a base, os esforços correspondentes que devem ser aplicados pelos atuadores nas juntas para manter o braço em equilíbrio.

**Exemplo:** dado o manipulador articulado planar de dois graus de liberdade mostrado na figura abaixo, determine os torques que devem ser aplicados pelos atuadores nas juntas para equilibrar uma força aplicada na garra igual a  ${}^3f_3 = [f_x \ f_y \ 0]^T$ .

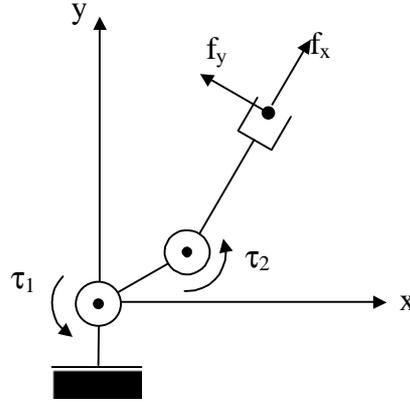


Figura 4.2. Esforços em robô planar com dois graus de liberdade.

As condições iniciais para as equações recursivas são:

$${}^3n_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^3f_3 = [f_x \ f_y \ 0]^T.$$

$${}^2f_2 = {}^2R_3 \cdot {}^3f_3 = [f_x \ f_y \ 0]^T$$

$${}^2n_2 = {}^2R_3 \cdot {}^3n_3 + [{}^2P_3 \times] \cdot {}^2R_3 \cdot {}^3f_3 = [0 \ 0 \ (L_2 \cdot f_y)]^T$$

$${}^1f_1 = {}^1R_2 \cdot {}^2f_2 = [(c_2 \cdot f_x - s_2 \cdot f_y) \ (s_2 \cdot f_x + c_2 \cdot f_y) \ 0]^T$$

$${}^1n_1 = {}^1R_2 \cdot {}^2n_2 + [{}^1P_2 \times] \cdot {}^1R_2 \cdot {}^2f_2 = [0 \ 0 \ (L_2 \cdot f_y + L_1(s_2 \cdot f_x + c_2 \cdot f_y))]^T$$

Como as juntas 1 e 2 são rotacionais, temos:

$$\tau_1 = {}^1z_1^T \cdot {}^1n_1 = (L_1 \cdot s_2) \cdot f_x + (L_1 \cdot c_2 + L_2) \cdot f_y$$

$$\tau_2 = {}^2z_2^T \cdot {}^2n_2 = L_2 \cdot f_y$$

ou, em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1 \cdot s_2) & (L_1 \cdot c_2 + L_2) \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Note que a matriz acima é exatamente igual à transposta da matriz jacobiana  ${}^3J(q)$ , conforme foi determinada no capítulo anterior. Note também que, enquanto a componente de força  $f_y$ , igual a  ${}^3f_{y3}$ , produz conjugado sobre as juntas 1 e 2, a componente de força  $f_x$ , igual a  ${}^3f_{x3}$ , não produz conjugado sobre a junta 2, visto que sua linha de ação passa pela origem do referencial  $\{2\}$ . Por outro lado, para  $\theta_2$  diferente de zero, esta componente se propaga pela estrutura, produzindo um conjugado em torno da junta 1, o qual deve ser equilibrado pelo torque da junta,  $\tau_1$ .

## Esforços Generalizados:

Visando obter expressões mais compactas e fáceis de manipular, vamos escrever as equações recursivas de equilíbrio estático em forma matricial.

$$\begin{bmatrix} {}^i n_i \\ {}^i f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i R_{i+1} & [{}^i P_{i+1} \times] \cdot {}^i R_{i+1} \\ \mathbf{0} & {}^i R_{i+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{i+1} n_{i+1} \\ {}^{i+1} f_{i+1} \end{bmatrix}$$

Definimos, em espaço cartesiano, o vetor  $6 \times 1$  de esforços generalizados,  ${}^i F_i$ , aplicados pelo elo  $\{i-1\}$  sobre o elo  $\{i\}$ , como:

$${}^i F_i = [{}^i n_i^T \quad {}^i f_i^T]^T$$

Assim, a expressão matricial acima pode ser expressa de forma compacta como:

$${}^i F_i = {}^i L_{i+1} \cdot {}^{i+1} F_{i+1}$$

Considerando que, se a junta  $i$  for rotacional, o esforço na mesma é igual a  $\tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i n_i$  e, se a junta  $i$  for prismática,  $\tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i f_i$ , podemos expressar  $\tau_i$  em função dos esforços generalizados utilizando a máscara de junta  ${}^i Z_i$ :

$$\tau_i = {}^i Z_i^T \cdot {}^i F_i$$

lembrando que  ${}^i Z_i = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  se a junta  $i$  for rotacional e  ${}^i Z_i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  se a junta  $i$  for prismática.

Para um robô de  $N$  juntas atuadas, definimos  $\tau$ , vetor  $N \times 1$  de esforços de junta, como:

$$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_N]^T$$

Resolvendo sucessivamente os esforços de elo, partindo da ferramenta, podemos calcular  $\tau$  em função dos esforço generalizados sobre a ferramenta,  ${}^{N+1} F_{N+1}$ ,

$$\begin{aligned} {}^N F_N &= {}^N L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \\ {}^{N-1} F_{N-1} &= {}^{N-1} L_N \cdot {}^N F_N = {}^{N-1} L_N \cdot {}^N L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} = {}^{N-1} L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \\ &\vdots \\ {}^1 F_1 &= {}^1 L_2 \cdot {}^2 F_2 = {}^1 L_2 \cdot {}^2 L_3 \cdot \dots \cdot {}^{N-1} L_N \cdot {}^N L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} = {}^1 L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_N &= {}^N Z_N^T \cdot {}^N F_N = {}^N Z_N^T \cdot {}^N L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \\ \tau_{N-1} &= {}^{N-1} Z_{N-1}^T \cdot {}^N F_N = {}^{N-1} Z_{N-1}^T \cdot {}^{N-1} L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \\ &\vdots \\ \tau_1 &= {}^1 Z_1^T \cdot {}^1 F_1 = {}^1 Z_1^T \cdot {}^1 L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau = [({}^1 Z_1^T \cdot {}^1 L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1}) \quad \dots \quad ({}^{N-1} Z_{N-1}^T \cdot {}^{N-1} L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1}) \quad ({}^N Z_N^T \cdot {}^N L_{N+1} \cdot {}^{N+1} F_{N+1})]^T$$

$$\Rightarrow \tau = [{}^{N+1} L_1 \cdot {}^1 Z_1 \quad {}^{N+1} L_2 \cdot {}^2 Z_2 \quad \dots \quad {}^{N+1} L_N \cdot {}^N Z_N]^T \cdot {}^{N+1} F_{N+1} = {}^{N+1} J(q)^T \cdot {}^{N+1} F_{N+1}$$

### Conservação de Potência:

Na expressão acima, verificamos que os esforços na ferramenta são mapeados nos esforços de junta através da transposta da matriz jacobiana. Podemos verificar esta mesma relação a partir do princípio da conservação de potência. Se consideramos um mecanismo ideal, onde não há perdas na transmissão de potência dos atuadores de junta para a ferramenta, então, a potência consumida pelos atuadores deve ser igual à potência transferida à carga pela ferramenta, ou seja:

$$\tau^T \cdot dq/dt = {}^0F_{N+1}^T \cdot {}^0V_{N+1}$$

Lembrando que  ${}^0V_{N+1} = {}^0J(q) \cdot dq/dt$ , podemos escrever:

$$\tau^T \cdot dq/dt = {}^0F_{N+1}^T \cdot {}^0V_{N+1} = {}^0F_{N+1}^T \cdot {}^0J(q) \cdot dq/dt \Rightarrow \tau^T = {}^0F_{N+1}^T \cdot {}^0J(q)$$

$$\Rightarrow \tau = {}^0J(q)^T {}^0F_{N+1}$$

Os esforços generalizados na ferramenta podem ser expressos no seu próprio referencial através de:

$${}^{N+1}F_{N+1} = {}^{N+1}[R]_0 \cdot {}^0F_{N+1} \Rightarrow {}^0F_{N+1} = {}^{N+1}[R]_0^T \cdot {}^{N+1}F_{N+1} = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}F_{N+1}$$

Lembrando que  ${}^0J(q) = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}J(q)$ , então, podemos expressar a relação entre esforços de junta e esforços cartesianos no referencial da ferramenta  $\{N+1\}$ :

$$\tau = {}^0J(q)^T {}^0F_{N+1} = ({}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}J(q))^T \cdot ({}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}F_{N+1})$$

$$\tau = {}^{N+1}J(q)^T \cdot [R]_{N+1}^T \cdot [R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}F_{N+1} = {}^{N+1}J(q)^T \cdot {}^{N+1}F_{N+1}$$

Note que a expressão acima é exatamente igual àquela derivada anteriormente a partir das equações recursivas de esforços generalizados.

### Singularidades:

De forma análoga ao que ocorre no mapeamento entre velocidades, a relação entre esforços em espaço cartesiano e em espaço de juntas depende da matriz jacobiana, a qual é função da configuração corrente do manipulador,  $q$ . Assim, podem existir configurações específicas para as quais não é possível realizar o mapeamento inverso, que expressa os esforços na ferramenta em função dos esforços nas juntas. Este mapeamento pode ser obtido a partir do mapeamento direto:

$$\tau = {}^{N+1}J(q)^T \cdot {}^{N+1}F_{N+1} \Rightarrow {}^{N+1}J(q) \cdot \tau = {}^{N+1}J(q) \cdot {}^{N+1}J(q)^T \cdot {}^{N+1}F_{N+1}$$

$$\Rightarrow {}^{N+1}F_{N+1} = [{}^{N+1}J(q) \cdot {}^{N+1}J(q)^T]^{-1} \cdot {}^{N+1}J(q) \cdot \tau$$

No caso particular em que o número de juntas atuadas é igual ao número de graus de liberdade em espaço cartesiano, o a matriz jacobiana é quadrada ( $N \times N$ ) e, se for de *rank* completo, poderá ser invertida. Assim:

$${}^{N+1}F_{N+1} = [{}^{N+1}J(q)^T]^{-1} \cdot \tau$$

Observe que se, para uma dada configuração  $q$ , a matriz  ${}^{N+1}J(q)^T$  for singular, não poderemos expressar  ${}^{N+1}F_{N+1}$  em função de  $\tau$ . As configurações para as quais isto acontece são chamadas de singularidades do mecanismo e são iguais às configurações singulares que ocorrem no mapeamento entre velocidades. Assim, as configurações singulares são:

$$\Rightarrow \text{conjunto de configurações singulares} = \{q / \det(J(q)^T) = 0\}$$

Como já vimos no caso do mapeamento entre velocidades, as singularidades podem ocorrer nos limites do espaço de trabalho, (com o braço estendido), ou no interior do espaço de trabalho, (geralmente devidas ao alinhamento de dois ou mais eixos de juntas). Numa singularidade, o manipulador perde um ou mais graus de liberdade em espaço cartesiano. Neste caso, existirão direções ao longo das quais a estrutura do manipulador pode resistir a qualquer esforço externo aplicado na ferramenta, independente do seu valor. Visto de outra maneira, nessas direções, o manipulador é capaz de exercer o maior esforço com a sua ferramenta:

$${}^{N+1}F_{N+1} = [{}^{N+1}J(q)^T]^{-1} \cdot \tau \rightarrow \infty$$

**Exemplo:** calcule os esforços na ferramenta em função dos torques de junta e determine as singularidades do mecanismo para o manipulador articulado planar de dois graus de liberdade.

No exemplo anterior determinamos o mapeamento direto:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_1 \cdot s_2) & (L_1 \cdot c_2 + L_2) \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

Invertendo  ${}^3J(q)^T$ , temos:

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = 1/(L_1 \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)) \cdot \begin{bmatrix} L_2 & -(L_1 \cdot c_2 + L_2) \\ 0 & (L_1 \cdot s_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

As singularidades são configurações para as quais  $\det({}^3J(q)^T) = 0$ . Assim:

$$\det({}^3J(q)^T) = \det \begin{bmatrix} L_1 s_2 & (L_1 c_2 + L_2) \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} = L_1 \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2)$$

Ou seja, o mecanismo está em uma configuração singular se  $L_1 \cdot L_2 \cdot \text{sen}(\theta_2) = 0$ , que corresponde a  $\theta_2 = k \cdot \pi$ , com  $k$  inteiro. Podemos verificar que:

- k par  $\Rightarrow$  braço completamente esticado: singularidade no limite do espaço de trabalho.
- k ímpar  $\Rightarrow$  braço dobrado sobre si mesmo: singularidade no interior do espaço de trabalho.

Como era de esperar, as configurações singulares obtidas coincidem com aquelas obtidas para o mapeamento de velocidades do mesmo manipulador. Repare que na singularidade ( $\theta_2 = 0$ , por exemplo), temos:

$$f_x = \tau_1 / (L_1 \cdot s_2) - (L_1 \cdot c_2 + L_2) \cdot \tau_2 / (L_1 \cdot L_2 \cdot s_2) \rightarrow \infty$$

$$f_y = \tau_2 / L_2$$

Ou seja, por menores que sejam  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , conseguem resistir a esforços infinitos na direção axial da ferramenta. Observe que, na realidade, esta situação é instável. Qualquer afastamento da singularidade irá solicitar torques nas juntas, os quais serão maiores, quanto maior for  $f_x$ .

## 4.2. Medidas de Distribuição de Massa:

### Momentos:

Considere um corpo rígido de massa  $m$  e volume  $V$ , com um referencial  $\{A\}$  fixo nele. Seja a função de densidade  $\rho = \rho({}^A P) = dm({}^A P)/dV$ , que descreve a quantidade infinitesimal de massa  $dm$  que é contida em um volume infinitesimal  $dV$  localizado na posição  ${}^A P$  do corpo. Para caracterizar quantitativamente, de modo mais simples, a maneira como a massa está distribuída no corpo, definem-se as seguintes medidas de distribuição de massa:

#### **Momento de ordem 0 – massa do corpo:**

$${}^A m^{(0)} = \int_V \rho({}^A P) \cdot dV = m$$

#### **Momento de ordem 1 – massa $\times$ centro de massa do corpo:**

$${}^A m^{(1)} = \int_V {}^A P \cdot \rho({}^A P) \cdot dV = m \cdot {}^A P_G$$

Onde,  ${}^A P_G$  é a posição do centro de massa do corpo expressa no referencial  $\{A\}$ .

#### **Momento de ordem 2 – tensor de inércia do corpo:**

$${}^A m^{(2)} = \int_V [{}^A P \times] \cdot [{}^A P \times]^T \cdot \rho({}^A P) \cdot dV = \int_V [({}^A P^T \cdot {}^A P) \cdot I - ({}^A P \cdot {}^A P^T)] \cdot \rho({}^A P) \cdot dV = {}^A I$$

Onde, a matriz simétrica  ${}^A I$ , de dimensões  $3 \times 3$ , é o tensor de inércia do corpo expresso no referencial  $\{A\}$ .

Os elementos da diagonal de  ${}^A I$  são denominados momentos de inércia em torno dos eixos  $x_A$ ,  $y_A$  e  $z_A$ , respectivamente:

$${}^A I_{xx} = \int_V ({}^A P_y^2 + {}^A P_z^2) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

$${}^A I_{yy} = \int_V ({}^A P_z^2 + {}^A P_x^2) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

$${}^A I_{zz} = \int_V ({}^A P_x^2 + {}^A P_y^2) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

Os elementos fora da diagonal de  ${}^A I$ , (desconsiderando o sinal negativo), são denominados produtos de inércia em relação aos pares de eixos  $(x_A, y_A)$ ,  $(y_A, z_A)$ ,  $(z_A, x_A)$ , respectivamente:

$${}^A I_{xy} = -\int_V ({}^A P_x \cdot {}^A P_y) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

$${}^A I_{yz} = -\int_V ({}^A P_y \cdot {}^A P_z) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

$${}^A I_{zx} = -\int_V ({}^A P_z \cdot {}^A P_x) \cdot \rho({}^A P) \cdot dV$$

### **Teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner):**

Considere um corpo de massa  $m$ , cujo centro de massa está localizado na posição  ${}^U P_G$  relativa a um referencial  $\{U\}$ . Seja  $\{G\}$  um referencial com origem no centro de massa  ${}^U P_G$  do corpo e com a mesma orientação de  $\{U\}$ , de modo que os eixos de  $\{G\}$  são paralelos aos eixos de  $\{U\}$ . Então, o teorema dos eixos paralelos estabelece que:

$${}^U I = {}^G I + m \cdot [{}^U P_G \times] \cdot [{}^U P_G \times]^T = {}^G I + m \cdot [({}^U P_G^T \cdot {}^U P_G) \cdot I - ({}^U P_G \cdot {}^U P_G^T)]$$

**Exemplo:** dado o paralelepípedo de densidade  $\rho$  constante e dimensões  $L_x$ ,  $L_y$  e  $L_z$ , mostrado na figura abaixo, determine a sua massa, a posição do seu centro de massa  ${}^A P_G$  em relação a um referencial  $\{A\}$  fixo na quina do paralelepípedo e o tensor de inércia expresso em  $\{A\}$  e em um referencial  $\{G\}$  paralelo a  $\{A\}$ , com origem em  ${}^A P_G$ .

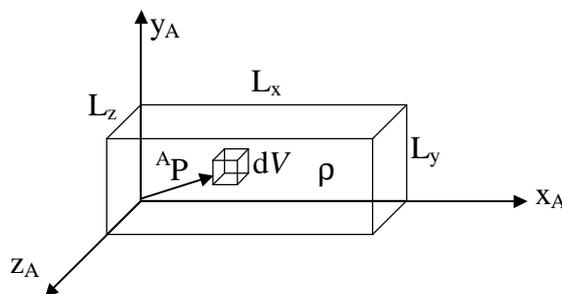


Figura 4.3. Distribuição de massa em um paralelepípedo.

$$m = {}^A m^{(0)} = \int_V \rho({}^A P) \cdot dV = \rho \cdot \int_V dV = \rho \cdot V = \rho \cdot L_x \cdot L_y \cdot L_z$$

$${}^A m^{(1)} = \int_V {}^A P \cdot \rho({}^A P) \cdot dV = \rho \cdot [(L_y \cdot L_z \cdot L_x^2)/2 \quad (L_z \cdot L_x \cdot L_y^2)/2 \quad (L_y \cdot L_z \cdot L_x^2)/2]^T$$

$$\text{Mas, } {}^A P_G = {}^A m^{(1)}/m \Rightarrow {}^A P_G = [L_x/2 \quad L_y/2 \quad L_z/2]^T$$

$${}^A I = {}^A m^{(2)} = \int_V [{}^A P \times] \cdot [{}^A P \times]^T \cdot \rho({}^A P) \cdot dV = \rho \cdot \int_V [{}^A P \times] \cdot [{}^A P \times]^T \cdot dV$$

$$\Rightarrow {}^A I = \rho \int_V \begin{bmatrix} (y^2+z^2) & -x \cdot y & -x \cdot z \\ -y \cdot x & (z^2+x^2) & -y \cdot z \\ -z \cdot x & -z \cdot y & (x^2+y^2) \end{bmatrix} dV$$

$$\Rightarrow {}^A I = m \cdot \begin{bmatrix} (L_y^2+L_z^2)/3 & -L_x \cdot L_y/4 & -L_x \cdot L_z/4 \\ -L_y \cdot L_x/4 & (L_z^2+L_x^2)/3 & -L_y \cdot L_z/4 \\ -L_z \cdot L_x/4 & -L_z \cdot L_y/4 & (L_x^2+L_y^2)/3 \end{bmatrix}$$

$${}^A I = {}^G I + m \cdot [{}^A P_G \times] \cdot [{}^A P_G \times]^T \Rightarrow {}^G I = {}^A I - m \cdot [{}^A P_G \times] \cdot [{}^A P_G \times]^T$$

$$\Rightarrow {}^G I = m \cdot \begin{bmatrix} (L_y^2+L_z^2)/12 & 0 & 0 \\ 0 & (L_z^2+L_x^2)/12 & 0 \\ 0 & 0 & (L_x^2+L_y^2)/12 \end{bmatrix}$$

### 4.3. Dinâmica:

#### Equações de movimento:

Um corpo rígido movimentando-se livremente no espaço possui seis graus de liberdade de movimento, três de posição e três de orientação. Assim, seis equações independentes são necessárias para descrever o seu movimento. Considere um corpo rígido cuja posição em relação a um referencial inercial {U} é descrita pelo vetor  ${}^U P_G$  ligando a origem de {U} à origem do referencial {G} fixo no corpo e com origem no centro de massa do mesmo. Considere um referencial {UG} paralelo a {U}, mas com a mesma origem de {G}, (ou seja, no centro de massa do corpo), conforme mostra a figura abaixo. Assumindo que o corpo rígido possui um momento linear  $M_L$  e um momento angular  $M_A$ , então, o corpo é submetido a uma força resultante externa  ${}^U f_G$  e a um conjugado resultante externo em torno de {G}  ${}^U n_G$  dados pela Segunda Lei do movimento de Newton:

$${}^U f_G = d(M_L)/dt$$

$${}^U n_G = d(M_A)/dt$$

Assumindo que a massa do corpo é constante e igual a m, o momento linear é:

$$M_L = m \cdot d({}^U P_G)/dt = m \cdot {}^U v_G$$

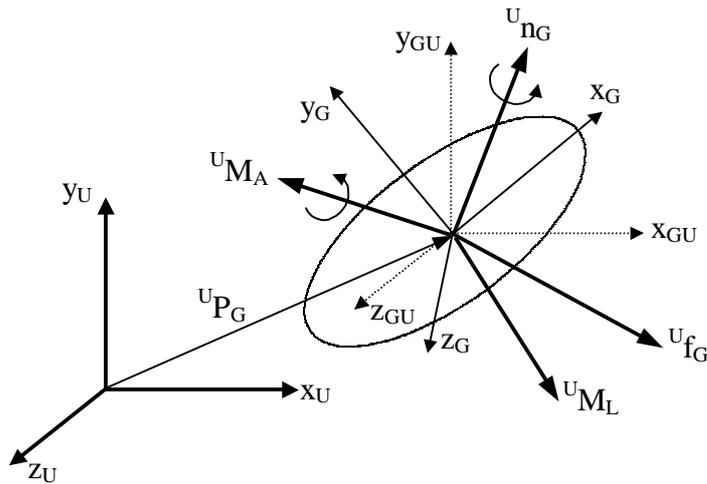


Figura 4.4. Momentos e esforços resultantes em um corpo rígido.

Assim, a força resultante sobre o corpo é dada pela Equação de Newton:

$${}^U f_G = m \cdot d^2({}^U P_G) / dt^2 = m \cdot d({}^U v_G) / dt = m \cdot {}^U v_G'$$

Considerando que  ${}^U f_G = {}^U R_G \cdot {}^G f_G$  e  ${}^U v_G' = {}^U R_G \cdot {}^G v_G'$ , então, a equação de Newton no referencial {G} fixo no corpo é dada por:

$${}^G f_G = m \cdot {}^G v_G'$$

Considere que o corpo gira com uma velocidade angular  ${}^U \omega_G = {}^U \omega_G$ , conforme mostrado na figura abaixo. Seja  $dV$  o volume de uma partícula infinitesimal do mesmo, então, sua massa é dada por  $dm = \rho \cdot dV$ , onde  $\rho$  é a densidade da partícula. Sejam  ${}^U P$  o vetor de posição da partícula em relação a {U} e  ${}^{UG} P$  o vetor de posição da partícula em relação a {UG}, tal que  ${}^U P = {}^U P_G + {}^{UG} P$ . A velocidade linear com que a partícula se desloca em relação ao eixo de rotação é dada por  $d({}^{UG} P) / dt = {}^{UG} \omega_G \times {}^{UG} P$ . Então, o momento angular da partícula infinitesimal é dado por:

$$dM_A = {}^{UG} P \times [(\rho \cdot dV) \cdot d({}^{UG} P) / dt] = {}^{UG} P \times [(\rho \cdot dV) \cdot ({}^{UG} \omega_G \times {}^{UG} P)]$$

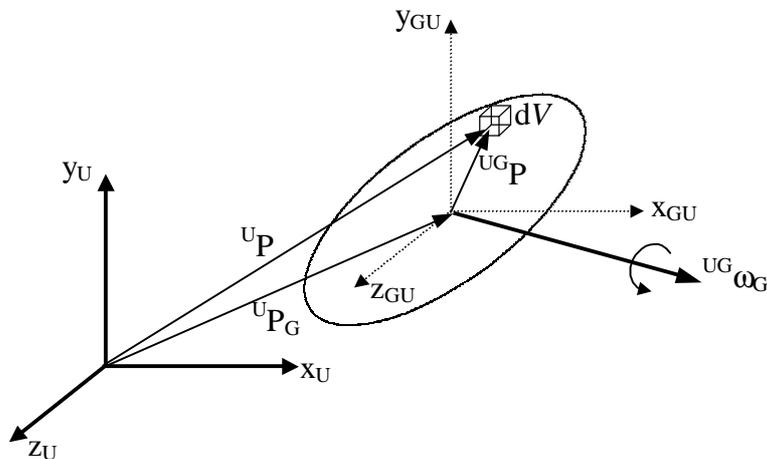


Figura 4.5. Rotação de um corpo rígido.

Assim, o momento angular total do corpo pode ser obtido integrando  $dM_A$  ao longo de todo o volume  $V$  do mesmo:

$$M_A = \int_V dM_A = \int_V {}^{UG}P \times ({}^{UG}\omega_G \times {}^{UG}P) \cdot \rho \cdot dV$$

$$\Rightarrow M_A = \left( \int_V [{}^{UG}P \times] [{}^{UG}P \times]^T \cdot \rho \cdot dV \right) \cdot {}^{UG}\omega_G = {}^{UG}I \cdot {}^{UG}\omega_G$$

Assim, o conjugado resultante externo sobre o corpo rígido é dado por:

$${}^U n_G = d({}^{UG}I \cdot {}^{UG}\omega_G) / dt$$

Como o referencial  $\{UG\}$  é paralelo ao referencial inercial  $\{U\}$ , o tensor de inércia  ${}^{UG}I$  não será constante, variando de acordo com a orientação relativa entre  $\{G\}$  e  $\{UG\}$ . Por outro lado, expressando o momento angular no referencial  $\{G\}$ , temos  $M_A = {}^U R_G \cdot {}^G M_A$ , ou  ${}^G M_A = {}^U R_G^T \cdot M_A$ . Como  ${}^{UG}\omega_G = {}^U \omega_G = {}^U R_G \cdot {}^G \omega_G$ , temos:

$${}^G M_A = {}^U R_G^T \cdot {}^{UG}I \cdot {}^U R_G \cdot {}^G \omega_G = {}^G I \cdot {}^G \omega_G$$

onde  ${}^G I = [{}^U R_G^T \cdot {}^{UG}I \cdot {}^U R_G]$  é o tensor de inércia no referencial  $\{G\}$ . Expressando  ${}^{UG}I$  em função de  ${}^G I$ , temos:

$${}^{UG}I = [{}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^U R_G^T]$$

Como o referencial  $\{G\}$  é fixo no corpo,  ${}^G I$  é um tensor constante. Assim,

$${}^U n_G = d(M_A) / dt = d({}^U R_G \cdot {}^G M_A) / dt = {}^U R_G \cdot d({}^G M_A) / dt + {}^U \omega_G \times ({}^U R_G \cdot {}^G M_A)$$

$$\Rightarrow {}^U n_G = {}^U R_G \cdot d({}^G I \cdot {}^G \omega_G) / dt + ({}^U R_G \cdot {}^G \omega_G) \times ({}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^G \omega_G)$$

$$\Rightarrow {}^U n_G = {}^U R_G \cdot [{}^G I \cdot d({}^G \omega_G) / dt + {}^G \omega_G \times ({}^G I \cdot {}^G \omega_G)]$$

Mas, como  ${}^U n_G = {}^U R_G \cdot {}^G n_G$  e  $d({}^G \omega_G) / dt = {}^G \omega_G'$ , temos:

$${}^G n_G = {}^G I \cdot {}^G \omega_G' + {}^G \omega_G \times ({}^G I \cdot {}^G \omega_G)$$

A expressão acima é a Equação de Euler descrita no referencial  $\{G\}$ . Para representar a Equação de Euler no referencial  $\{U\}$ , é necessário converter a aceleração angular para este sistema de eixos:

$$d({}^U \omega_G) / dt = d({}^U R_G \cdot {}^G \omega_G) / dt = {}^U R_G \cdot d({}^G \omega_G) / dt + {}^U \omega_G \times {}^U \omega_G = {}^U R_G \cdot {}^G \omega_G'$$

$$\Rightarrow {}^U n_G = {}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^G \omega_G' + ({}^U \omega_G) \times ({}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^G \omega_G) =$$

$$\Rightarrow {}^U n_G = {}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^U R_G^T \cdot {}^U \omega_G' + ({}^U \omega_G) \times ({}^U R_G \cdot {}^G I \cdot {}^U R_G^T \cdot {}^U \omega_G)$$

$$\Rightarrow {}^U n_G = {}^{UG}I \cdot {}^U \omega_G' + ({}^U \omega_G) \times ({}^{UG}I \cdot {}^U \omega_G)$$

### Aceleração do centro de massa de um elo:

Para aplicar as equações de movimento a um elo {i} de um manipulador robótico é necessário calcular a força e o conjugado resultante sobre o mesmo, os quais dependem da aceleração a que está submetido o centro de massa.

Como foi previamente deduzido, para três referenciais móveis {A}, {B} e {C}, as acelerações relativas entre os mesmos são dadas por:

$${}^A V_C' = {}^A V_B' + {}^A R_B \cdot d^2({}^B P_{CB})/dt^2 + {}^A \omega_B' \times ({}^A R_B \cdot {}^B P_{CB}) + {}^A \omega_B \times ({}^A \omega_B \times {}^A R_B \cdot {}^B P_{CB}) + 2 \cdot ({}^A \omega_B \times {}^A R_B \cdot d({}^B P_{CB})/dt)$$

Fazendo a seguinte substituição: {0} → {A}, {i} → {B} e {Gi} → {C},  ${}^i P_{Gi} \rightarrow {}^B P_{CB}$ , onde {Gi} é um referencial paralelo a {i} e com origem no centro de massa do elo {i} e  ${}^i P_{Gi}$  é a posição do centro de massa em relação ao referencial {i}, temos,

$${}^0 V_{Gi}' = {}^0 V_i' + {}^0 R_i \cdot d^2({}^i P_{Gi})/dt^2 + {}^0 \omega_i' \times ({}^0 R_i \cdot {}^i P_{Gi}) + {}^0 \omega_i \times ({}^0 \omega_i \times {}^0 R_i \cdot {}^i P_{Gi}) + 2 \cdot ({}^0 \omega_i \times {}^0 R_i \cdot d({}^i P_{Gi})/dt)$$

Como  ${}^i P_{Gi}$  é constante, as suas derivadas são nulas. Portanto:

$${}^0 V_{Gi}' = {}^0 V_i' + {}^0 \omega_i' \times ({}^0 R_i \cdot {}^i P_{Gi}) + {}^0 \omega_i \times ({}^0 \omega_i \times {}^0 R_i \cdot {}^i P_{Gi})$$

Multiplicando a expressão acima por  ${}^0 R_i$ , podemos representar a aceleração linear do centro de massa em função de vetores expressos no referencial {i} do próprio elo:

$${}^i V_{Gi}' = {}^i V_i' + {}^i \omega_i' \times {}^i P_{Gi} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{Gi})$$

A velocidade angular do referencial {Gi} é igual à velocidade angular do referencial {i}, uma vez que ambos possuem a mesma orientação. Assim:

$${}^0 \omega_{Gi} = {}^0 \omega_i \quad \Rightarrow \quad {}^i \omega_{Gi} = {}^i \omega_i$$

$${}^0 \omega_{Gi}' = {}^0 \omega_i' \quad \Rightarrow \quad {}^i \omega_{Gi}' = {}^i \omega_i'$$

### Equilíbrio de esforços dinâmicos em um elo:

Em uma situação de equilíbrio dinâmico, um elo {i} de um manipulador sofre a ação de uma força resultante externa  ${}^i f_{Gi}$  e de um conjugado resultante externo  ${}^i n_{Gi}$  sobre o seu centro de massa {Gi}. O elo {i-1} exerce uma força  ${}^i f_i$  e  ${}^i n_i$  sobre o elo {i}. Da mesma forma, o elo {i} exerce os esforços  $f_{i+1}$  e  $n_{i+1}$  sobre o elo {i+1}, os quais correspondem, pela Lei de Ação e Reação, a esforços de mesmo módulo, mas sentido contrário, aplicados pelo elo {i+1} sobre o elo {i}, conforme o diagrama de corpo livre mostrado na figura abaixo. De acordo com esta figura, podemos estabelecer os seguintes balanços de forças e conjugados (expressos no referencial do elo {i}):

$$\text{Balanço de Conjugados:} \quad {}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = {}^i n_{Gi} + {}^i P_{Gi} \times {}^i f_{Gi}$$

$$\text{Balanço de forças:} \quad {}^i f_i - {}^i f_{i+1} = {}^i f_{Gi}$$

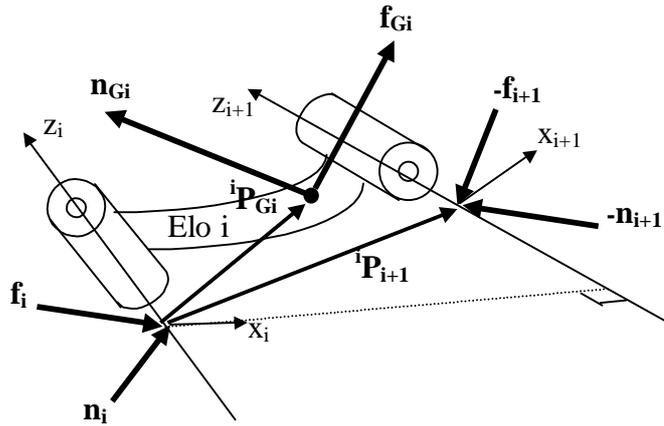


Figura 4.6. Diagrama de corpo livre para um elo {i}.

Expressando os esforços  $f_{i+1}^i$  e  $n_{i+1}^i$  no referencial {i+1}, temos:

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + [{}^i P_{i+1} \times] \cdot {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i n_{Gi} + [{}^i P_{Gi} \times] \cdot {}^i f_{Gi}$$

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} + {}^i f_{Gi}$$

Mas, das equações de Newton e Euler, usando a expressão da aceleração do centro de massa, temos:

$${}^i n_{Gi} = {}^G I \cdot {}^i \omega_{Gi}' + {}^i \omega_{Gi} \times ({}^G I \cdot {}^i \omega_{Gi}) = {}^G I \cdot {}^i \omega_i' + {}^i \omega_i \times ({}^G I \cdot {}^i \omega_i)$$

$${}^i f_{Gi} = m_i \cdot {}^i v_{Gi}' = m_i \cdot [{}^i v_i' + {}^i \omega_i' \times {}^i P_{Gi} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{Gi})]$$

Substituindo estas expressões dos esforços resultantes nas equações de balanço de forças e conjugados, temos:

$${}^i n_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} n_{i+1} + [{}^i P_{i+1} \times] \cdot {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} + {}^G I \cdot {}^i \omega_i' + {}^i \omega_i \times ({}^G I \cdot {}^i \omega_i) + m_i \cdot [{}^i P_{Gi} \times] \cdot [{}^i v_i' + {}^i \omega_i' \times {}^i P_{Gi} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{Gi})]$$

$${}^i f_i = {}^i R_{i+1} \cdot {}^{i+1} f_{i+1} + m_i \cdot [{}^i v_i' + {}^i \omega_i' \times {}^i P_{Gi} + {}^i \omega_i \times ({}^i \omega_i \times {}^i P_{Gi})]$$

As equações acima permitem computar recursivamente os esforços nos elos, partindo da ferramenta em direção à base. Estas equações, junto com as equações recursivas obtidas para as velocidades e as acelerações dos elos, constituem o Algoritmo Recursivo Newton-Euler. Os esforços  $\tau_i$  correspondentes nas juntas podem ser facilmente obtidos, lembrando que, quando a junta i for rotacional, o torque produzido pelo atuador deverá resistir à componente  $n_{zi}^i$  de  $n_i$ , quando a junta i for prismática, a força produzida pelo atuador deverá resistir à componente  $f_{zi}^i$  de  $f_i$ . Assim:

$$\tau_i = n_{zi} \quad \Rightarrow \quad \tau_i = z_i^T \cdot n_i \quad (\text{junta i rotacional})$$

$$\tau_i = f_{zi} \quad \Rightarrow \quad \tau_i = z_i^T \cdot f_i \quad (\text{junta i prismática})$$

Observe que o esforço computacional envolvido no cômputo do algoritmo Newton-Euler é linearmente proporcional ao número de junta N.

### **Equação de Dinâmica Inversa:**

Computar os esforços de junta correspondentes a uma trajetória de junta especificada é um problema que aparece freqüentemente no controle dinâmico de manipuladores. A partir das posições de junta e de suas primeiras e segundas derivadas ( $q$ ,  $dq/dt$ ,  $d^2q/dt^2$ ), é possível calcular o vetor  $\tau$  de esforços de juntas correspondente usando as equações recursivas do Algoritmo Newton-Euler. A expressão analítica vetorial resultante é denominada de Equação de Dinâmica Inversa, a qual é constituída por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Esta equação pode ser decomposta nos seguintes termos:

$$\tau = \tau_I(q, d^2q/dt^2) + \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)$$

onde:

$\tau$  = vetor  $N \times 1$  de esforços nas juntas.

$q$  = vetor  $N \times 1$  de variáveis de junta.

$\tau_I(q, d^2q/dt^2)$  = vetor  $N \times 1$  de reações inerciais.

$\tau_C(q, dq/dt)$  = vetor  $N \times 1$  de reações coriolis e centrífugas.

$\tau_G(q)$  = vetor  $N \times 1$  de reações gravitacionais.

$\tau_F(dq/dt)$  = vetor  $N \times 1$  de reações de atrito.

### **Reações Inerciais:**

O vetor de reações inerciais incorpora esforços resistentes ao movimento devidos a que a massa dos elos limita a aceleração dos mesmos. O vetor de reações inerciais pode ser expresso como:

$$\tau_I = M(q).d^2q/dt^2$$

onde  $M(q)$  é a Matriz de Inércia  $N \times N$ , simétrica e positiva definida. Observe que  $\tau_I$  é proporcional às acelerações das juntas. O vetor de reações inerciais pode ser computado através do algoritmo Newton-Euler adotando as seguintes condições iniciais:

$${}^0\omega_0 = 0$$

$${}^0\dot{\omega}_0 = 0$$

$${}^0v_0 = 0$$

$$dq_i/dt = 0 \text{ para } i = 1, \dots, N$$

Ou seja, fazendo as velocidades de junta iguais a zero, só sobram os esforços inerciais.

Considerando a matriz de inércia, a equação de dinâmica inversa pode ser escrita na sua forma padrão:

$$\tau = M(q).d^2q/dt^2 + \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(q, dq/dt)$$

### Reações Coriolis e Centrífugas:

O vetor de reações coriolis e centrífugas incorpora esforços resistentes ao movimento correspondentes a acelerações devidas à rotação relativa entre elos. O vetor  $\tau_C$  inclui termos onde aparecem produtos de velocidades de juntas (reações coriolis) e velocidades de junta elevadas ao quadrado (reações centrífugas). O vetor de reações coriolis e centrífugas pode ser computado através do algoritmo Newton-Euler adotando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} {}^0\omega_0 &= 0 \\ {}^0\dot{\omega}_0 &= 0 \\ {}^0v_0 &= 0 \\ d^2q_i/dt^2 &= 0 \text{ para } i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo as acelerações de junta iguais a zero, só sobram os esforços coriolis e centrífugos.

### Reações Gravitacionais:

O vetor de reações coriolis e centrífugas incorpora esforços resistentes ao movimento devido ao peso dos elos do manipulador. Em lugar de computar o peso resultante sobre cada elo, os esforços gravitacionais podem ser calculados facilmente através do algoritmo Newton-Euler usando o seguinte artifício: substituir massa gravitacional por massa inercial. Em outras palavras: em lugar de considerar que o robô está submetido a um campo gravitacional, assumir que a base do robô é acelerada na direção vertical, para cima, com uma aceleração igual à aceleração da gravidade local  $g$ , ( $g \cong 9,81 \text{ m/s}^2$ ). Ao acelerar o robô para cima, seus elos resistirão ao movimento com uma força de reação para baixo que será exatamente igual ao peso dos mesmos. Desta maneira, o vetor de reações gravitacionais pode ser computado através do algoritmo Newton-Euler adotando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} {}^0\omega_0 &= 0 \\ {}^0\dot{\omega}_0 &= 0 \\ {}^0v_0 &= -g = [g_x \ g_y \ g_z]^T \\ dq_i/dt &= 0 \text{ para } i = 1, \dots, N \\ d^2q_i/dt^2 &= 0 \text{ para } i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Ou seja, fazendo as velocidades e acelerações de junta iguais a zero, cancelamos as reações inerciais e as reações coriolis e centrífugas, sobrando apenas as reações gravitacionais.

### Reações de Atrito:

Se for necessário considerar o atrito, este pode ser incorporado diretamente às equações de saída do algoritmo Newton-Euler, visto que estas reações ocorrem no eixo das juntas:

$$\tau_i = {}^i z_i^T \cdot i n_i + \tau_{Fi} \quad (\text{junta } i \text{ rotacional})$$

$$\tau_i = {}^i z_i^T \cdot i f_i + \tau_{Fi} \quad (\text{junta } i \text{ prismática})$$

onde,  $\tau_{Fi}$  é a reação de atrito na junta  $i$ , de tal modo que  $\tau_F = [\tau_{F1} \ \tau_{F2} \ \dots \ \tau_{FN}]^T$ . Um modelo simples para as reações de atrito consiste em uma componente de atrito viscoso somada a uma componente de atrito “Coulomb”:

$$\tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i n_i + k_{FVi} \cdot dq_i/dt + k_{FCi} \cdot \text{sgn}(dq_i/dt) \quad (\text{junta } i \text{ rotacional})$$

$$\tau_i = {}^i z_i^T \cdot {}^i f_i + k_{FVi} \cdot dq_i/dt + k_{FCi} \cdot \text{sgn}(dq_i/dt) \quad (\text{junta } i \text{ prismática})$$

onde  $k_{FVi}$  e  $k_{FCi}$  são os coeficientes de atrito viscoso e Coulomb da junta  $i$ , respectivamente. A função sinal,  $\text{sgn}(dq_i/dt)$ , retorna o sinal da velocidade da junta  $i$ :

$$\text{sgn}(dq_i/dt) = 1 \quad \text{se } dq_i/dt > 0$$

$$\text{sgn}(dq_i/dt) = 0 \quad \text{se } dq_i/dt = 0$$

$$\text{sgn}(dq_i/dt) = -1 \quad \text{se } dq_i/dt < 0$$

### Matriz de Inércia:

Se for necessário calcular a matriz de inércia, esta pode ser obtida a partir do algoritmo Newton-Euler através do artifício descrito a seguir.

Defina  $\tau^{(0)}$  como a soma das reações coriolis e centrífugas, reações gravitacionais e reações de atrito. Assim,

$$\tau^{(0)} = \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)$$

Observe que  $\tau^{(0)}$  é numericamente igual ao vetor de esforços de junta  $\tau$  obtido a partir da equação de dinâmica inversa quando as acelerações de junta são todas iguais a zero, ou seja:

$$\tau^{(0)} = M(q) \cdot 0 + \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)$$

Assim,  $\tau^{(0)}$  pode ser obtido através do algoritmo Newton-Euler forçando as seguintes condições iniciais:

$${}^0 \omega_0 = 0$$

$${}^0 \dot{\omega}_0 = 0$$

$${}^0 v_0 = -g = [g_x \ g_y \ g_z]^T$$

$$d^2 q_i / dt^2 = 0 \text{ para } i = 1, \dots, N$$

A partir da equação de dinâmica inversa e do vetor  $\tau^{(0)}$ , temos que:

$$M(q) \cdot d^2 q / dt^2 = \tau - \tau^{(0)}$$

Observe se todas as acelerações das juntas, exceto a da junta  $i$ , forem iguais a zero, a  $i$ -ésima coluna da matriz de inércia,  $M_i$ , é numericamente igual a:

$$M_i = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_i \ \dots \ M_N] \cdot [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T = M(q) \cdot [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$$

Onde o último vetor do lado direito da equação acima é um vetor coluna  $N \times 1$ , cujos elementos são todos nulos, exceto o  $i$ -ésimo, que é igual a 1. Desta maneira, a coluna  $M_i$  pode ser computada a partir do vetor  $M(q) \cdot d^2q/dt^2$ , desde que o vetor de acelerações de junta seja imposto de tal modo que todas as acelerações sejam zero, exceto a da junta  $i$ , que deve ser igual a 1. Assim, definimos  $\tau^{(i)}$  como o vetor obtido através do algoritmo Newton-Euler quando forçamos as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} {}^0\omega_0 &= 0 \\ {}^0\omega_0' &= 0 \\ {}^0v_0 &= -g = [g_x \ g_y \ g_z]^T \\ d^2q_i/dt^2 &= 1 \\ d^2q_j/dt^2 &= 0 \text{ para } j \neq i \end{aligned}$$

Como  $\tau^{(i)} = M_i + \tau^{(0)}$ , podemos obter a coluna  $M_i$  a partir de  $\tau^{(0)}$  e  $\tau^{(i)}$ :

$$M_i = \tau^{(i)} - \tau^{(0)}$$

Observe que para calcular as  $N$  colunas da matriz de inércia, o algoritmo Newton-Euler deve ser executado  $N+1$  vezes, (uma para  $\tau^{(0)}$  e  $N$  vezes para  $\tau^{(i)}$ ). Como o esforço computacional envolvido na execução do algoritmo Newton-Euler cresce linearmente com  $N$ , o cômputo da matriz de inércia pelo método acima envolve um esforço computacional de ordem  $N(N+1)$ .

**Exemplo:** calcule os torques nas juntas a partir das trajetórias de junta para o manipulador planar de dois graus de liberdade. Considere que a massa de cada elo está concentrada na sua extremidade distal. Determine os termos da equação dinâmica.

Como a massa está concentrada na extremidade distal do elo,

$${}^G1I = 0, \quad {}^G2I = 0,$$

$${}^1P_{G1} = [L_1 \ 0 \ 0]^T, \quad {}^2P_{G2} = [L_2 \ 0 \ 0]^T$$

Lembrando que, do exemplo do capítulo anterior,

$$\begin{aligned} {}^0\omega_0 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ {}^1\omega_1 &= [0 \ 0 \ d\theta_1/dt]^T \\ {}^2\omega_2 &= [0 \ 0 \ (d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)]^T \\ {}^3\omega_3 &= [0 \ 0 \ (d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)]^T \\ {}^0\omega_0' &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ {}^1\omega_1' &= [0 \ 0 \ d^2\theta_1/dt^2]^T \\ {}^2\omega_2' &= [0 \ 0 \ (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]^T \\ {}^3\omega_3' &= [0 \ 0 \ (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{v}_0' &= [0 \quad g \quad 0]^T \\
{}^1\mathbf{v}_1' &= [s_1g \quad c_1g \quad 0]^T \\
{}^2\mathbf{v}_2' &= [(s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2) \quad (c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2) \quad 0]^T \\
{}^3\mathbf{v}_3' &= [{}^3v_{3x}' \quad {}^3v_{3y}' \quad {}^3v_{3z}']^T, \text{ onde:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^3v_{3x}' &= s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2 \\
\Rightarrow {}^3v_{3y}' &= c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) \\
\Rightarrow {}^3v_{3z}' &= 0
\end{aligned}$$

A partir das expressões acima, obtemos as acelerações dos centros de massa dos elos:

$${}^1\mathbf{v}_{G1}' = {}^1\mathbf{v}_1' + {}^1\boldsymbol{\omega}_1' \times {}^1\mathbf{P}_{G1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{P}_{G1})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^1v_{G1x}' &= g \cdot s_1 - L_1 \cdot (d(\theta_1)/dt)^2 \\
\Rightarrow {}^1v_{G1y}' &= g \cdot c_1 + L_1 \cdot d^2\theta_1/dt^2 \\
\Rightarrow {}^1v_{G1z}' &= 0
\end{aligned}$$

$${}^2\mathbf{v}_{G2}' = {}^2\mathbf{v}_2' + {}^2\boldsymbol{\omega}_2' \times {}^2\mathbf{P}_{G2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{P}_{G2})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^2v_{G2x}' &= s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2 \cdot (d(\theta_1)/dt + d(\theta_2)/dt)^2 \\
\Rightarrow {}^2v_{G2y}' &= c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2 \cdot (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) \\
\Rightarrow {}^2v_{G2z}' &= 0
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima nas equações recursivas de esforços nos elos, temos:

$$\begin{aligned}
{}^3f_3 &= 0 && \text{(condição inicial)} \\
{}^3n_3 &= 0 && \text{(condição inicial)}
\end{aligned}$$

$${}^2\mathbf{f}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\mathbf{f}_3 + m_2 \cdot [{}^2\mathbf{v}_2' + {}^2\boldsymbol{\omega}_2' \times {}^2\mathbf{P}_{G2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{P}_{G2})]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^2f_{2x} &= m_2 \cdot [s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2 \cdot (d(\theta_1)/dt + d(\theta_2)/dt)^2] \\
\Rightarrow {}^2f_{2y} &= m_2 \cdot [c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2 \cdot (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)] \\
\Rightarrow {}^2f_{2z} &= 0
\end{aligned}$$

$${}^2\mathbf{n}_2 = {}^2\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\mathbf{n}_3 + [{}^2\mathbf{P}_3 \times] \cdot {}^2\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\mathbf{f}_3 + {}^G2\mathbf{I} \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2' + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^G2\mathbf{I} \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2) + m_2 \cdot [{}^2\mathbf{P}_{G2} \times] \cdot [{}^2\mathbf{v}_2' + {}^2\boldsymbol{\omega}_2' \times {}^2\mathbf{P}_{G2} + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times ({}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{P}_{G2})]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^2n_{2x} &= 0 \\
\Rightarrow {}^2n_{2y} &= 0 \\
\Rightarrow {}^2n_{2z} &= m_2 \cdot L_2 \cdot [c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2 \cdot (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau_2 = {}^2n_{2z} = m_2 \cdot L_2 \cdot [c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2 \cdot (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]$$

$${}^1\mathbf{f}_1 = {}^1\mathbf{R}_2 \cdot {}^2\mathbf{f}_2 + m_1 \cdot [{}^1\mathbf{v}_1' + {}^1\boldsymbol{\omega}_1' \times {}^1\mathbf{P}_{G1} + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times ({}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{P}_{G1})]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^1f_{1x} &= m_2.c_2.[s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2.(d(\theta_1)/dt + d(\theta_2)/dt)^2] + \\ &\quad - m_2.s_2.[c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)] + \\ &\quad + m_1.[g.s_1 - L_1.(d(\theta_1)/dt)^2] \\ \Rightarrow {}^1f_{1y} &= m_2.s_2.[s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2.(d(\theta_1)/dt + d(\theta_2)/dt)^2] + \\ &\quad + m_2.c_2.[c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)] + \\ &\quad + m_1.[g.c_1 + L_1.d^2(\theta_1)/dt^2] \\ \Rightarrow {}^1f_{1z} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^1n_1 &= {}^1R_2.{}^2n_2 + [{}^1P_2 \times].{}^1R_2.{}^2f_2 + {}^G1I.{}^1\omega_1' + {}^1\omega_1 \times ({}^G1I.{}^1\omega_1) + \\ &\quad + m_1.[{}^1P_{G1} \times].[{}^1v_1' + {}^1\omega_1' \times {}^1P_{G1} + {}^1\omega_1 \times ({}^1\omega_1 \times {}^1P_{G1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow {}^1n_{1x} &= 0 \\ \Rightarrow {}^1n_{1y} &= 0 \\ \Rightarrow {}^1n_{1z} &= m_2.L_2.[c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)] + \\ &\quad + m_2.L_1.[g.c_1 + L_1.d^2\theta_1/dt^2 + L_2.c_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) - L_2.s_2.(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2] + \\ &\quad + m_1.L_1.[g.c_1 + L_1.d^2\theta_1/dt^2] \\ \Rightarrow \tau_1 &= {}^1n_{1z} = m_2.L_2.[c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)] + \\ &\quad + m_2.L_1.[g.c_1 + L_1.d^2\theta_1/dt^2 + L_2.c_2.(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) - L_2.s_2.(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2] + \\ &\quad + m_1.L_1.[g.c_1 + L_1.d^2\theta_1/dt^2] \end{aligned}$$

A partir dos torques de junta calculados é possível explicitar os termos da equação dinâmica.

Matriz de inércia:

$$M(q) = \begin{bmatrix} [L_2^2.m_2 + L_1^2.(m_1 + m_2) + 2L_1L_2m_2.c_2] & [L_2^2.m_2 + 2L_1L_2m_2.c_2] \\ [L_2^2.m_2 + 2L_1L_2m_2.c_2] & [L_2^2.m_2] \end{bmatrix}$$

$$\tau_C(q, dq/dt) = \begin{bmatrix} -L_1L_2m_2[s_2(d\theta_2/dt)^2 + 2.c_2(d\theta_1/dt)(d\theta_2/dt)] \\ L_1L_2m_2.s_2.(d\theta_1/dt)^2 \end{bmatrix}$$

$$\tau_G(q) = \begin{bmatrix} L_2m_2.g.c_{12} + L_1(m_1 + m_2).g.c_1 \\ L_2m_2.g.c_{12} \end{bmatrix}$$

### Equação de Dinâmica Direta:

Computar as trajetórias de junta que correspondem à resposta do robô aos esforços de junta aplicados pelos atuadores é um problema que deve ser resolvido quando se deseja simular computacionalmente o comportamento dinâmico de um robô manipulador. A expressão analítica vetorial que descreve a aceleração das juntas em função dos esforços aplicados pelos atuadores é denominada de Equação de Dinâmica Direta, a qual, de modo análogo à equação de Dinâmica Inversa, é constituída por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e acopladas. Esta equação pode ser decomposta nos seguintes obtida diretamente a partir da dinâmica inversa :

$$d^2q(t)/dt^2 = M(q)^{-1}.[\tau - \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)]$$

Observe que é necessário conhecer a inversa da matriz de inércia. Como esta é positiva definida, é sempre não singular, podendo ser invertida sempre. Para obter as velocidades e posições de junta, basta integrar duas vezes a expressão acima, a partir das condições iniciais:

$$dq(t)/dt = \int (d^2q(t)/dt^2) dt = \int (M(q)^{-1} \cdot [\tau - \tau_C(q, dq/dt) + \tau_G(q) + \tau_F(dq/dt)]) dt$$

$$q(t) = \int (dq/dt) dt$$

Para simular computacionalmente a resposta dinâmica do robô manipulador pode ser utilizado qualquer método de integração numérica, de acordo com a precisão requerida. Por exemplo, utilizando o método de integração de Euler com um passo de integração  $\Delta t$ , temos:

$$d^2q(t)/dt^2 = M(q(t))^{-1} \cdot [\tau(t) - \tau_C(q(t), dq(t)/dt) + \tau_G(q(t)) + \tau_F(dq(t)/dt)]$$

$$dq(t+\Delta t)/dt = dq(t)/dt + \Delta t \cdot d^2q(t)/dt^2$$

$$q(t+\Delta t) = q(t) + \Delta t \cdot dq(t)/dt$$

Finalmente, a partir do vetor  $q(t)$  obtido pelo processo de simulação numérica, as equações de cinemática direta podem ser utilizadas para determinar a localização dos elos do robô em espaço cartesiano a cada instante de amostragem  $t$ .