

3. CINEMÁTICA DIFERENCIAL

Neste capítulo abordamos a descrição do movimento do robô manipulador sem levar em conta os esforços que o produzem. Um importante problema cinemático associado ao movimento do robô é o mapeamento de velocidades e acelerações entre espaço cartesiano e espaço de juntas. Este problema pode ser descrito matematicamente através de uma matriz, que incorpora importantes informações estruturais sobre o comportamento do robô, a qual é denominada matriz jacobiana, ou simplesmente jacobiano. Um problema análogo é o mapeamento de esforços estáticos (com o manipulador parado). Este problema consiste em determinar o mapeamento entre os esforços a que a garra é submetida quando manipulando objetos (esforços em espaço cartesiano) e os esforços correspondentes exercidos pelos atuadores das juntas. Este problema está diretamente relacionado ao mapeamento definido pelo jacobiano para velocidades.

3.1. Representação de Velocidade de um Corpo Rígido:

Velocidade Linear:

Considere um corpo rígido com um referencial {B} fixo no mesmo. Seja a posição do corpo em relação a um referencial {A} dada pelo vetor de posição ${}^A P_B$, a velocidade com que o corpo se translada em relação a {A} é um atributo do ponto de origem ${}^A P_B$. Assim, a velocidade linear de {B} em relação a {A}, ${}^A v_B$, é definida pela derivada temporal de ${}^A P_B$:

$${}^A v_B = d({}^A P_B)/dt$$

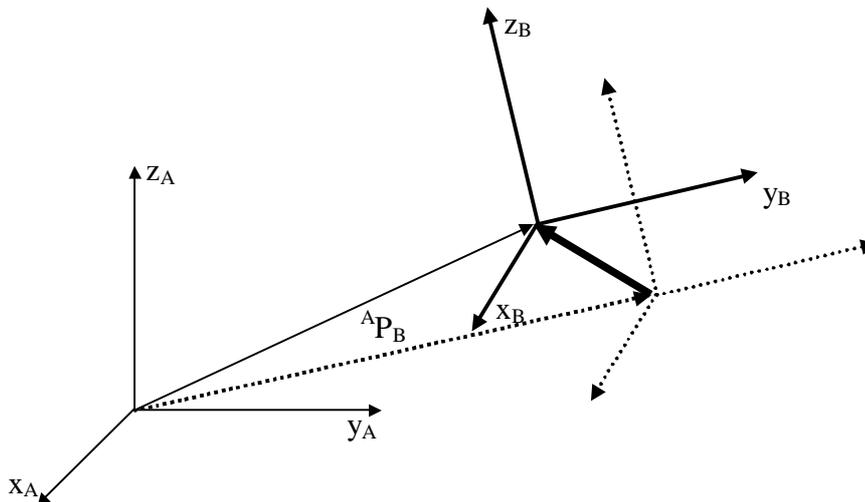


Figura 3.1. Velocidade linear ${}^A v_B$.

Velocidade Angular:

A velocidade com que um corpo gira em relação a um referencial {A} é um atributo do referencial {B} fixo no mesmo. Para representar a velocidade de rotação de {B} em relação a {A}, duas abordagens são adotadas comumente: a derivada dos ângulos de orientação e o vetor de velocidade angular.

Derivada dos ângulos de orientação:

Seja a de {B} em relação a {A} especificada através de uma tripla de ângulos de Euler ${}^A\Phi_B = [\phi \ \theta \ \psi]^T$. A velocidade de rotação de {B} em relação a {A} pode ser expressa pela derivada de ${}^A\Phi_B$ em relação ao tempo:

$$d{}^A\Phi_B/dt = [d\phi/dt \ d\theta/dt \ d\psi/dt]^T$$

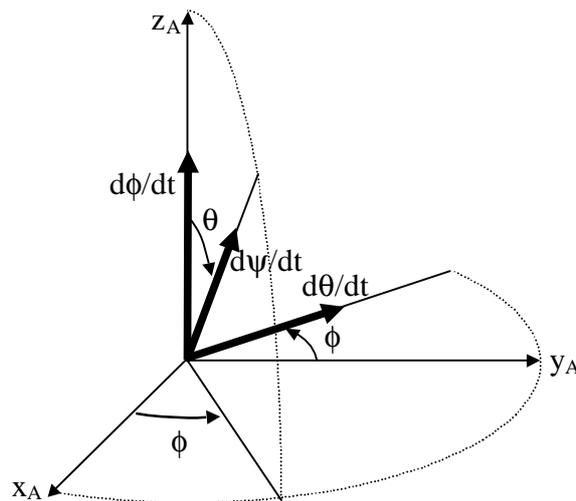


Figura 3.2. Rotação representada pela derivada dos ângulos de Euler ZYZ.

Nesta representação, a integral de $d{}^A\Phi_B/dt$ corresponde obviamente ao vetor ${}^A\Phi_B$, que tem um significado físico claro. Por outro lado, $d{}^A\Phi_B/dt$ é um vetor de rotação não ortogonais em torno de eixos de um referencial torto, os quais variam de acordo com valor corrente de ${}^A\Phi_B$.

Vetor de Velocidade Angular:

Seja a de {AB} um referencial paralelo a {B} e com origem coincidente com a origem de {A}. A mudança de orientação de {B} em relação a {A} pode ser descrita como a rotação de {AB} em torno de um vetor direcional passando pela origem de {A}. Uma forma compacta de representar esta rotação é através de um Vetor de Velocidade Angular ${}^A\omega_B$ alinhado com o eixo de rotação e cujo módulo é igual à velocidade de rotação em torno do mesmo. Nesta representação, a integral de ${}^A\omega_B$ não tem um significado físico claro. Por outro lado, ao contrário da representação por derivadas dos ângulos de Euler, ${}^A\omega_B$ é um vetor de componentes ortogonais de rotação em torno dos eixos de {A}.

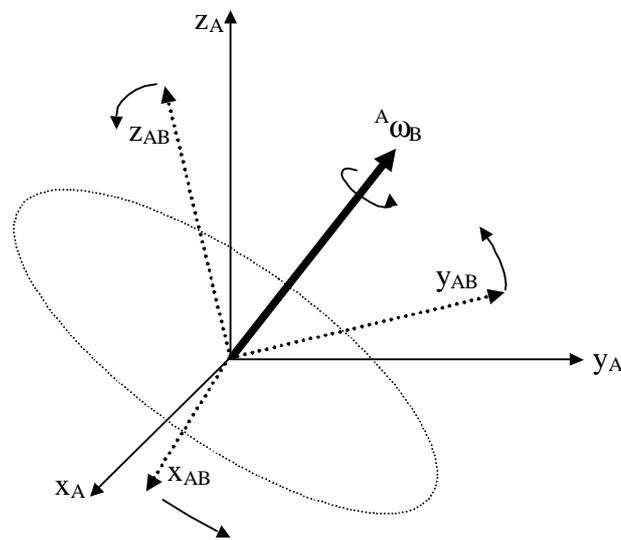


Figura 3.3. Vetor de velocidade angular.

A partir da figura abaixo, pode-se verificar que o vetor de velocidade angular ${}^A\omega_B$ se relaciona com o vetor $d^A\Phi_B/dt$ através da expressão matricial:

$${}^A\omega_B = \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} d^A\Phi_B/dt = R_\phi \cdot d^A\Phi_B/dt$$

A matriz R_ϕ na expressão acima é dependente do valor corrente de ${}^A\Phi_B$. Verifica-se que esta matriz torna-se singular quando $\sin(\theta) = 0$. Assim, qualquer velocidade rotacional possa ser descrita através de ${}^A\omega_B$ mas, por outro lado, existem velocidades que não podem ser descritas através de $d^A\Phi_B/dt$ quando {B} assume uma orientação para a qual $\sin(\theta) = 0$. Orientações com esta propriedade são denominadas singularidades representacionais de ${}^A\Phi_B$.

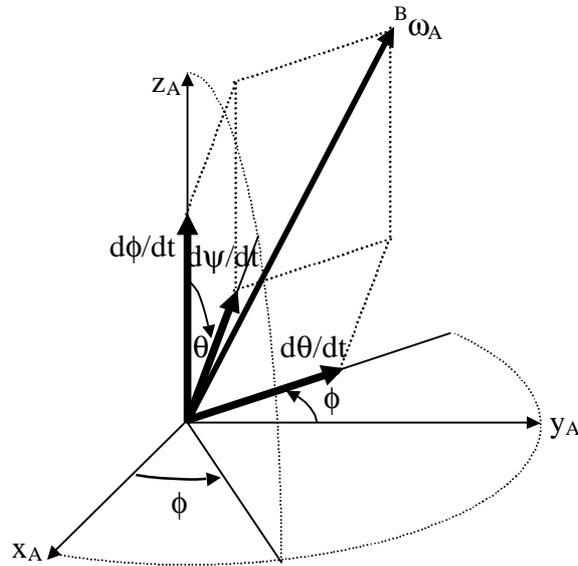


Figura 3.4. Relação entre $d^A\Phi_B/dt$ e o vetor de velocidade angular ${}^A\omega_B$.

3.2. Velocidades relativas em referenciais móveis:

Velocidade Linear Relativa:

Considere três referenciais móveis $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{C\}$. Denote ${}^A P_B$ a posição de $\{B\}$ relativa a $\{A\}$, ${}^B P_C$ a posição de $\{C\}$ relativa a $\{B\}$ e ${}^A P_C$ a posição de $\{C\}$ relativa a $\{A\}$. Esta última pode ser obtida a partir de ${}^A P_B$ e ${}^B P_C$ através de uma simples soma vetorial, desde que os dois vetores sejam expressos no mesmo sistema de coordenadas. Representando ${}^B P_C$ em $\{A\}$ através da matriz de rotação ${}^A R_B$, que especifica a orientação de $\{B\}$ relativa a $\{A\}$, temos:

$${}^A P_C = {}^A P_B + {}^A R_B \cdot {}^B P_C$$

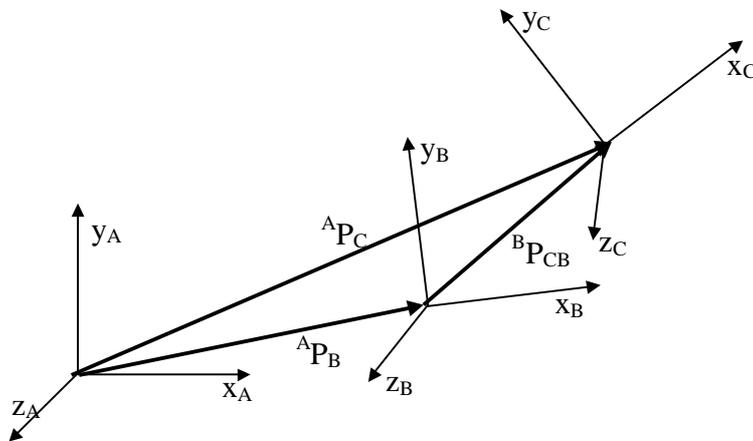


Figura 3.5. Posições relativas entre referenciais móveis.

Derivando a expressão acima podemos obter o vetor velocidade linear de {C} em relação a {A} a partir das velocidades relativas de {B} em relação a {A} e de {C} em relação a {B}:

$$d({}^A P_C)/dt = d({}^A P_B)/dt + d({}^A R_B \cdot {}^B P_{CB})/dt$$

$$\Rightarrow {}^A V_C = {}^A V_B + d({}^A R_B \cdot {}^B P_{CB})/dt$$

$$\Rightarrow {}^A V_C = {}^A V_B + d({}^A R_B)/dt \cdot {}^B P_{CB} + {}^A R_B \cdot d({}^B P_{CB})/dt$$

O segundo termo do lado direito da equação acima, que envolve a derivada e ${}^A R_B$, é uma componente de velocidade que aparece quando ${}^A R_B$ varia, ou seja, quando {B} está girando em relação a {A}. Isto gera uma componente de velocidade linear de {C} em relação a {A}, mesmo se {B} não se translade em relação a {A} e {C} não faça o mesmo em relação a {B}. Detalhando o termo $d({}^A R_B)/dt \cdot {}^B P_C$:

$$d({}^A R_B)/dt \cdot {}^B P_C = [d({}^A X_B)/dt \quad d({}^A Y_B)/dt \quad d({}^A Z_B)/dt] \cdot {}^B P_C$$

Para determinar as derivadas que compõem as colunas de $d({}^A R_B)/dt$, considere o referencial {B} girando em relação a {A} com velocidade angular ${}^A \omega_B$. Para efeito de simplificação, considere que {A} e {B} possuem a mesma origem (${}^A P_B = 0$), diferindo apenas na sua orientação (${}^A R_B$ variando em função de ${}^A \omega_B$). Dado um ponto ${}^B P$ com coordenadas fixas em {B}, a sua representação em {A} ${}^A P$ será também função de ${}^A \omega_B$.

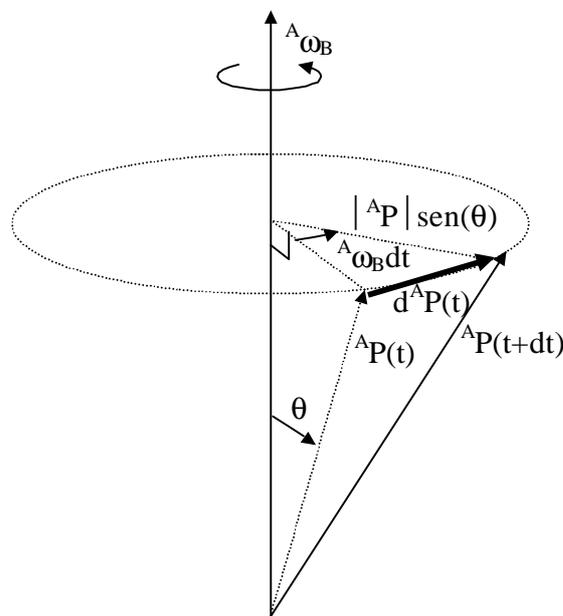


Figura 3.6. Velocidade de um ponto fixo em um referencial que gira.

Da figura acima, podemos observar que o vetor $d(\mathbf{A}P) = \mathbf{A}P(t+dt) - \mathbf{A}P(t)$ é perpendicular ao vetor $\mathbf{A}P(t)$ e ao vetor $\mathbf{A}\omega_B$. Por outro lado, quando $d(\mathbf{A}P)$ tende a zero, o seu módulo tende ao comprimento do arco $|d(\mathbf{A}P)| = |\mathbf{A}\omega_B \cdot dt| \cdot |\mathbf{A}P| \cdot \text{sen}(\theta)$, ou seja: $|d(\mathbf{A}P)/dt| = |\mathbf{A}\omega_B| \cdot |\mathbf{A}P| \cdot \text{sen}(\theta)$. Assim, $d(\mathbf{A}P)/dt$ pode ser expresso como o produto vetorial dos vetores $\mathbf{A}P$ e $\mathbf{A}\omega_B$:

$$d(\mathbf{A}P)/dt = \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}P$$

Desta forma, para o caso particular em que o vetor $\mathbf{A}P$ for igual aos eixos do referencial $\{B\}$ expressos em $\{A\}$, $\mathbf{A}x_B$, $\mathbf{A}y_B$ e $\mathbf{A}z_B$, temos:

$$d(\mathbf{A}x_B)/dt = \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}x_B \quad d(\mathbf{A}y_B)/dt = \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}y_B \quad d(\mathbf{A}z_B)/dt = \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}z_B$$

Assim:

$$d(\mathbf{A}R_B)/dt \cdot {}^B P_{CB} = [d(\mathbf{A}x_B)/dt \quad d(\mathbf{A}y_B)/dt \quad d(\mathbf{A}z_B)/dt] \cdot {}^B P_{CB} = [\mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}x_B \quad \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}y_B \quad \mathbf{A}\omega_B \times \mathbf{A}z_B] \cdot {}^B P_{CB}$$

$$\Rightarrow d(\mathbf{A}R_B)/dt \cdot {}^B P_{CB} = \mathbf{A}\omega_B \times [\mathbf{A}x_B \quad \mathbf{A}y_B \quad \mathbf{A}z_B] \cdot {}^B P_{CB} = \mathbf{A}\omega_B \times (\mathbf{A}R_B \cdot {}^B P_{CB})$$

Desta forma, a velocidade linear relativa de $\{C\}$ em relação a $\{A\}$ pode ser expressa como:

$$\mathbf{A}v_C = \mathbf{A}v_B + \mathbf{A}\omega_B \times (\mathbf{A}R_B \cdot {}^B P_{CB}) + \mathbf{A}R_B \cdot d({}^B P_{CB})/dt$$

Velocidade Angular Relativa:

De forma análoga ao caso linear, denote $\mathbf{A}\omega_B$ a velocidade angular de $\{B\}$ relativa a $\{A\}$, ${}^B\omega_{CB}$ a velocidade angular de $\{C\}$ relativa a $\{B\}$ e $\mathbf{A}\omega_C$ a velocidade angular de $\{C\}$ relativa a $\{A\}$. Esta última pode ser obtida a partir de $\mathbf{A}\omega_B$ e ${}^B\omega_{CB}$ através de uma simples soma vetorial, desde que os dois vetores sejam expressos no mesmo sistema de coordenadas. Representando ${}^B\omega_{CB}$ em $\{A\}$ através da matriz de rotação $\mathbf{A}R_B$, que especifica a orientação de $\{B\}$ relativa a $\{A\}$, temos:

$$\mathbf{A}\omega_C = \mathbf{A}\omega_B + \mathbf{A}R_B \cdot {}^B\omega_{CB}$$

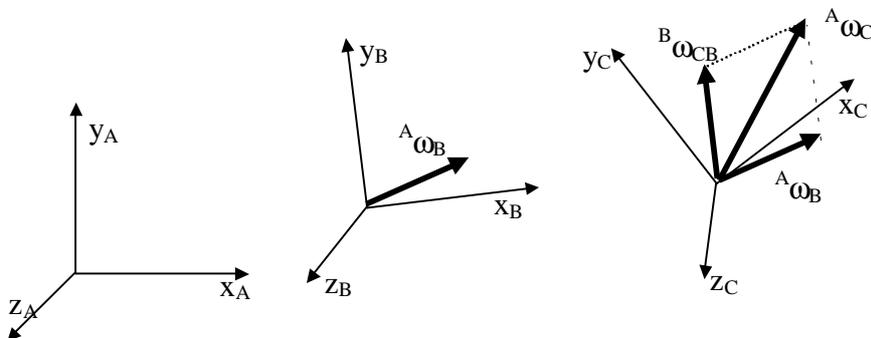


Figura 3.7. Velocidades angulares relativas entre referenciais móveis.

3.3. Representação de Aceleração de um Corpo Rígido:

Aceleração Linear:

Definimos o vetor de aceleração linear ${}^A\omega_B'$ de um referencial corpo rígido B relativa a um referencial {A} como a derivada temporal do vetor de velocidade linear ${}^A\omega_B$ de um referencial {B} relativa a {A}, onde {B} é fixo no corpo B:

$${}^A\omega_B' = d({}^A\omega_B)/dt = [d({}^A\omega_{Bx})/dt \quad d({}^A\omega_{By})/dt \quad d({}^A\omega_{Bz})/dt]^T$$

Aceleração Angular:

Definimos o vetor de aceleração angular ${}^A\omega_B'$ de um corpo rígido B relativa a um referencial {A} como a derivada temporal do vetor de velocidade angular ${}^A\omega_B$ de um referencial {B} relativa a {A}, onde {B} é fixo no corpo:

$${}^A\omega_B' = d({}^A\omega_B)/dt = [d({}^A\omega_{Bx})/dt \quad d({}^A\omega_{By})/dt \quad d({}^A\omega_{Bz})/dt]^T$$

3.4. Acelerações relativas em referenciais móveis:

Aceleração linear relativa:

Considere três referenciais móveis {A}, {B} e {C}. Denote ${}^A\omega_C'$ a aceleração linear de {C} relativa a {A}. Esta pode ser obtida derivando a expressão correspondente da velocidade linear ${}^A\omega_C$, função de ${}^A\omega_B$, ${}^A\omega_B$ e $d{}^B\omega_{CB}/dt$:

$${}^A\omega_C' = d{}^A\omega_C/dt = d[{}^A\omega_B + {}^A\omega_B \times ({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB}) + {}^A\omega_B \cdot d({}^B\omega_{CB})/dt]/dt$$

$$\Rightarrow {}^A\omega_C' = d{}^A\omega_B/dt + (d{}^A\omega_B/dt) \times ({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB}) + {}^A\omega_B \times d({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB})/dt + d({}^A\omega_B \cdot d({}^B\omega_{CB})/dt)/dt$$

$$\Rightarrow {}^A\omega_C' = {}^A\omega_B' + {}^A\omega_B' \times ({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB}) + {}^A\omega_B \times (d{}^A\omega_B/dt) \cdot {}^B\omega_{CB} + {}^A\omega_B \times {}^A\omega_B \cdot (d{}^B\omega_{CB}/dt) + (d{}^A\omega_B/dt) \cdot d({}^B\omega_{CB})/dt + {}^A\omega_B \cdot d^2({}^B\omega_{CB})/dt^2$$

Usando a identidade derivada anteriormente para a derivada de uma matriz de rotação ${}^A\omega_B$ vezes um vetor ${}^B\omega$: $d({}^A\omega_B)/dt \cdot {}^B\omega = {}^A\omega_B \times ({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega)$, temos:

$${}^A\omega_C' = {}^A\omega_B' + {}^A\omega_B \cdot d^2({}^B\omega_{CB})/dt^2 + {}^A\omega_B' \times ({}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB}) + {}^A\omega_B \times ({}^A\omega_B \times {}^A\omega_B \cdot {}^B\omega_{CB}) + 2 \cdot ({}^A\omega_B \times {}^A\omega_B \cdot d({}^B\omega_{CB})/dt)$$

Os dois primeiros termos do lado direito representam a soma vetorial das acelerações lineares de {B} e {C} expressas em {A}. O terceiro termo é uma componente de aceleração linear devido à aceleração angular de {B} e a que {C} está a uma distância ${}^B\omega_{CB}$ de {B}. Os dois últimos termos representam componentes de aceleração linear coriolis (produtos de velocidades) e centrífuga (velocidades ao quadrado).

Aceleração angular relativa:

Considere três referenciais móveis {A}, {B} e {C}. Denote ${}^A\omega_C'$ a aceleração linear de {C} relativa a {A}. Esta pode ser obtida derivando a expressão correspondente da velocidade linear ${}^A\omega_C$, função de ${}^A\omega_B$, e ${}^B\omega_{CB}$:

$${}^A\omega_C' = d{}^A\omega_C/dt = d[{}^A\omega_B + {}^A R_B \cdot {}^B\omega_{CB}]/dt = d{}^A\omega_B/dt + d({}^A R_B \cdot {}^B\omega_{CB})/dt$$

$$\Rightarrow {}^A\omega_C' = {}^A\omega_B' + (d{}^A R_B/dt) \cdot {}^B\omega_{CB} + {}^A R_B \cdot d{}^B\omega_{CB}/dt$$

Usando a identidade derivada anteriormente para a derivada de uma matriz de rotação ${}^A R_B$ vezes um vetor ${}^B V$: $d({}^A R_B)/dt \cdot {}^B V = {}^A\omega_B \times ({}^A R_B \cdot {}^B V)$, temos:

$${}^A\omega_C' = {}^A\omega_B' + {}^A R_B \cdot d{}^B\omega_{CB}/dt + {}^A\omega_B \times {}^A R_B \cdot {}^B\omega_{CB}$$

Os dois primeiros termos do lado direito representam a soma vetorial das acelerações angulares de {B} e {C} expressas em {A}. O último termo representa componentes de aceleração angular coriolis (produtos de velocidades) e centrífuga (velocidades ao quadrado).

3.5. Velocidades dos elos de um manipulador:

Considerando o manipulador robótico como uma cadeia cinemática aberta constituída por corpos rígidos (elos) interligados por juntas, utilizando as expressões obtidas para velocidades relativas entre referenciais móveis é possível determinar as velocidades relativas entre os elos do robô a partir das velocidades das juntas. A figura abaixo mostra a relação entre referenciais de dois elos consecutivos da cadeia cinemática, {i-1} e {i} e o referencial fixo na base do manipulador. Note que a posição de {i} em relação a {i-1} é dada pelo vetor ${}^{i-1}P_i = [a_{i-1} \quad -s\alpha_{i-1} \cdot d_i \quad c\alpha_{i-1} \cdot d_i]^T$, o qual, para juntas prismáticas, varia em função do deslocamento da junta i, d_i .

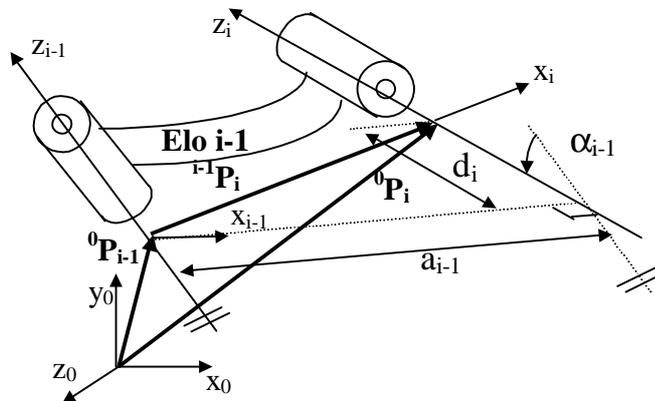


Figura 3.8. Posições relativas entre os elos móveis {i-1}, {i} e a base fixa {0}.

Utilizando as expressões obtidas para velocidades relativas entre referenciais móveis, podemos determinar as velocidades lineares e angulares do elo {i} em relação à base a partir das velocidades lineares e angulares do elo anterior, (o elo {i-1}) e da velocidade relativa entre ambos, a qual é dependente da velocidade da junta {i}. Nas equações de velocidade angular relativa e de velocidade linear relativa faremos a seguinte substituição de referenciais: {A} por {0}, {B} por {i-1} e {C} por {i}. Para uma junta rotacional, a velocidade de rotação do elo {i} em relação ao elo {i-1}, ${}^{i-1}\omega_{i,i-1}$, é um vetor na direção do eixo z_i da junta i, de magnitude igual à velocidade de rotação da mesma $d\theta_i/dt$. Assim, expressando este vetor no referencial {i-1}, temos a seguinte substituição:

$${}^B\omega_{CB} \rightarrow {}^{i-1}\omega_{i,i-1} = {}^{i-1}R_i \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

onde ${}^i z_i = [0 \ 0 \ 1]^T$. De modo análogo, para uma junta prismática, a velocidade de translação do elo {i} em relação ao elo {i-1}, $d({}^{i-1}P_i)/dt$, é um vetor na direção do eixo z_i da junta i, de magnitude igual à velocidade de translação da mesma $d(d_i)/dt$. Assim, expressando este vetor no referencial {i-1}, temos a seguinte substituição:

$$d({}^B P_{CB})/dt \rightarrow d({}^{i-1}P_i)/dt = {}^{i-1}R_i \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt$$

Assim, de acordo com estas expressões, fazendo as substituições mencionadas acima:

Velocidade Angular em referencial de base:

$${}^0\omega_i = {}^0\omega_{i-1} + {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}\omega_{i,i-1} = {}^0\omega_{i-1} + {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

$$\Rightarrow {}^0\omega_i = {}^0\omega_{i-1} + {}^0R_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

Note que, para uma junta prismática, o termo $d(\theta_i)/dt$ é zero. Portanto, no caso em que a junta i é prismática, o último termo da equação acima será nulo.

Velocidade Linear em referencial de base:

$${}^0v_i = {}^0v_{i-1} + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot d({}^{i-1}P_i)/dt = {}^0v_{i-1} + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt$$

$$\Rightarrow {}^0v_i = {}^0v_{i-1} + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt$$

Note que, para uma junta rotacional, o termo $d(d_i)/dt$ é zero. Portanto, no caso em que a junta i for rotacional, o último termo da equação acima será nulo.

As expressões acima permitem computar recursivamente as velocidades de elo, partindo da base até a ferramenta, a partir das velocidades das juntas. Geralmente dispomos das matrizes de rotação individuais ${}^{i-1}R_i$, onde cada uma delas é dependente do ângulo da junta i, θ_i , variável apenas se a junta i for rotacional. Neste caso, é mais conveniente operar com equações em que as velocidades de elo são expressas no referencial do próprio elo.

Multiplicando as equações recursivas de velocidade por iR_0 , é possível transformá-las de modo a que as velocidades do elo $\{i\}$ sejam expressas apenas em função das velocidades do elo anterior $\{i-1\}$ e da velocidade da junta i , $d\theta_i/dt$.

Velocidade Angular em referencial de elo:

$${}^iR_0 \cdot {}^0\omega_i = {}^iR_0({}^0\omega_{i-1} + {}^0R_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt) = {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_0 \cdot {}^0\omega_{i-1} + {}^iR_0 \cdot {}^iR_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

$$\Rightarrow {}^i\omega_i = {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1} + {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

Velocidade Linear em referencial de elo:

$$\begin{aligned} {}^iR_0 \cdot {}^0v_i &= {}^iR_0({}^0v_{i-1} + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt) = \\ &= {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_0 \cdot {}^0v_{i-1} + {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_0 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i)] + {}^iR_0 \cdot {}^iR_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt = \\ &= {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}v_{i-1} + {}^iR_{i-1} \cdot [({}^{i-1}R_0 \cdot {}^0\omega_{i-1}) \times ({}^{i-1}R_0 \cdot {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i)] + {}^iR_0 \cdot {}^iR_{i-1} \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt \\ &= {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}v_{i-1} + {}^iR_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}P_i] + {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^i v_i = {}^iR_{i-1} \cdot ({}^{i-1}v_{i-1} + {}^{i-1}\omega_{i-1} \times {}^{i-1}P_i) + {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt$$

3.6. Acelerações dos elos de um manipulador:

De forma análoga ao procedimento feito acima para as velocidades dos elos, fazendo as mesmas substituições nas expressões obtidas para acelerações relativas em referenciais móveis, podemos facilmente obter equações recursivas que permitem computar as acelerações de um elo a partir das acelerações e velocidades do elo anterior e das acelerações e velocidades da junta associada.

Para uma junta rotacional, a aceleração de rotação do elo $\{i\}$ em relação ao elo anterior $\{i-1\}$, ${}^{i-1}\omega_{i,i-1}$, é um vetor na direção do eixo z_i da junta i , de magnitude igual à aceleração de rotação da mesma $d^2\theta_i/dt^2$. Assim, expressando este vetor no referencial $\{i-1\}$, temos a seguinte substituição:

$$d({}^B\omega_{CB})/dt \rightarrow d({}^{i-1}\omega_{i,i-1})/dt = {}^{i-1}R_i \cdot {}^i z_i \cdot d^2\theta_i/dt^2$$

Para uma junta prismática, a aceleração de translação do elo $\{i\}$ em relação ao elo $\{i-1\}$, $d^2({}^{i-1}P_i)/dt^2$, é um vetor na direção do eixo z_i da junta i , de magnitude igual à aceleração de translação da mesma $d^2(d_i)/dt^2$. Assim, expressando este vetor no referencial $\{i-1\}$, temos a seguinte substituição:

$$d^2({}^B P_{CB})/dt^2 \rightarrow d^2({}^{i-1}P_i)/dt^2 = {}^{i-1}R_i \cdot {}^i z_i \cdot d^2(d_i)/dt^2$$

Aceleração Angular em referencial de base:

$${}^0\omega_i' = {}^0\omega_{i-1}' + {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + {}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt$$

$$\Rightarrow {}^0\omega_i' = {}^0\omega_{i-1}' + {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + {}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt$$

Note que, para uma junta prismática, o termo $d(\theta_i)/dt$ e sua derivada são iguais a zero. Portanto, no caso em que a junta i é prismática, os últimos dois termos da equação acima serão nulos.

Aceleração Linear em referencial de base:

$${}^0v_i' = {}^0v_{i-1}' + {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^iZ_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + {}^0\omega_{i-1}' \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + 2 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^iZ_i \cdot d(d_i)/dt)]$$

$$\Rightarrow {}^0v_i' = {}^0v_{i-1}' + {}^0\omega_{i-1}' \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + 2 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_i \cdot {}^iZ_i \cdot d(d_i)/dt)]$$

Note que, para uma junta rotacional, o termo $d(s_i)/dt$ e sua derivada são iguais a zero. Portanto, no caso em que a junta i é rotacional, os últimos dois termos da equação acima serão nulos.

Multiplicando as equações recursivas de aceleração por iR_0 , é possível transformá-las de modo a que as acelerações do elo $\{i\}$ sejam expressas apenas em função da acelerações e velocidades do elo anterior $\{i-1\}$ e da aceleração e velocidade da junta i , dq_i/dt .

Aceleração Angular em referencial de elo:

$$\begin{aligned} {}^iR_0 \cdot {}^0\omega_i' &= {}^iR_0 \cdot ({}^0\omega_{i-1}' + {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + {}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt) = \\ &= {}^iR_0 \cdot {}^0\omega_{i-1}' + {}^iR_0 \cdot {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + {}^iR_0 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt] = \\ &= {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_0 \cdot {}^0\omega_{i-1}' + {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + [({}^iR_0 \cdot {}^0\omega_{i-1}) \times ({}^iR_0 \cdot {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt)] = \\ &= {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1}' + {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + [({}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}R_0 \cdot {}^0\omega_{i-1}) \times ({}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^i\omega_i' = {}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1}' + {}^iZ_i \cdot d^2\theta_i/dt^2 + ({}^iR_{i-1} \cdot {}^{i-1}\omega_{i-1}) \times ({}^iZ_i \cdot d\theta_i/dt)$$

Aceleração Linear em referencial de elo:

$$\begin{aligned} {}^iR_0 \cdot {}^0v_i' &= {}^iR_0 \cdot \{ {}^0v_{i-1}' + {}^0\omega_{i-1}' \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0\omega_{i-1} \times ({}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i) + {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + \\ &\quad + 2 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d(d_i)/dt)] \} = \\ &= {}^iR_0 \cdot {}^0v_{i-1}' + {}^iR_0 \cdot [{}^0\omega_{i-1}' \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i)] + {}^iR_0 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0\omega_{i-1} \times {}^0R_{i-1} \cdot {}^{i-1}P_i)] + \\ &\quad + {}^iR_0 \cdot {}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + 2 \cdot {}^iR_0 \cdot [{}^0\omega_{i-1} \times ({}^0R_{i-1} \cdot {}^iZ_i \cdot d(d_i)/dt)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^i\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{v}_i' &= {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{v}_{i-1}' + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1}') \times ({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\mathbf{P}_i)] + \\
&+ {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times (({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times ({}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\mathbf{P}_i)] + \\
&+ {}^i\mathbf{z}_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + 2 \cdot [({}^i\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times ({}^i\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\mathbf{z}_i \cdot d(d_i)/dt)] = \\
&= {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1}' + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}' \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i] + {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i)] + {}^i\mathbf{z}_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + \\
&+ 2 \cdot [({}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times ({}^i\mathbf{z}_i \cdot d(d_i)/dt)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow {}^i\mathbf{v}_i' &= {}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot [{}^{i-1}\mathbf{v}_{i-1}' + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}' \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i + {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times ({}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times {}^{i-1}\mathbf{P}_i)] + \\
&+ {}^i\mathbf{z}_i \cdot d^2(d_i)/dt^2 + 2 \cdot [({}^i\mathbf{R}_{i-1} \cdot {}^{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \times ({}^i\mathbf{z}_i \cdot d(d_i)/dt)]
\end{aligned}$$

Exemplo: Calcule as velocidades e acelerações da ferramenta para o robô manipulador planar de dois graus de liberdade mostrado na figura abaixo.

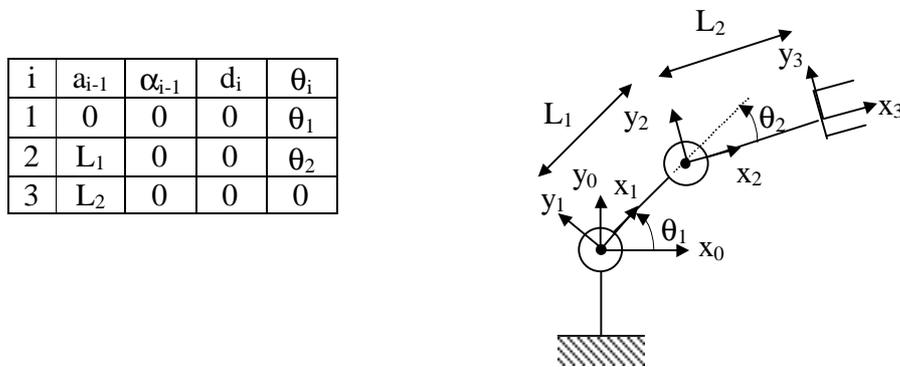


Figura 3.9. Robô manipulador planar com dois graus de liberdade.

A partir dos parâmetros Denavit-Hartenberg, determinamos as transformações de elo e cinemática direta:

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & L_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (L_1c_{12}+L_2c_{12}) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (L_1s_{12}+L_2s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Velocidades angulares:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{condição inicial})$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_0 + {}^1z_1 \cdot d\theta_1/dt = [0 \ 0 \ d\theta_1/dt]^T$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_1 + {}^2z_2 \cdot d\theta_2/dt = [0 \ 0 \ (d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)]^T$$

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = {}^3\mathbf{R}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2 + {}^3z_3 \cdot d\theta_3/dt = [0 \ 0 \ (d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)]^T$$

$$\Rightarrow {}^0\boldsymbol{\omega}_3 = {}^0\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\boldsymbol{\omega}_3 = [0 \ 0 \ (d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)]^T$$

Velocidades lineares (como todas as juntas são rotacionais, $d(d_i)/dt = 0$):

$${}^0\mathbf{v}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{condição inicial}).$$

$${}^1\mathbf{v}_1 = {}^1\mathbf{R}_0 \cdot ({}^0\mathbf{v}_0 + {}^0\boldsymbol{\omega}_0 \times {}^0\mathbf{P}_1) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$${}^2\mathbf{v}_2 = {}^2\mathbf{R}_1 \cdot ({}^1\mathbf{v}_1 + {}^1\boldsymbol{\omega}_1 \times {}^1\mathbf{P}_2) = [(L_1s_{12}d\theta_1/dt) \ (L_1c_{12}d\theta_1/dt) \ 0]^T$$

$${}^3\mathbf{v}_3 = {}^3\mathbf{R}_2 \cdot ({}^2\mathbf{v}_2 + {}^2\boldsymbol{\omega}_2 \times {}^2\mathbf{P}_3) = [(L_1s_{12}d\theta_1/dt) \ (L_1c_{12}d\theta_1/dt + L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \ 0]^T$$

$${}^0\mathbf{v}_3 = {}^0\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\mathbf{v}_3 = [(-L_1s_{12}d\theta_1/dt - L_2s_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \ (L_1c_{12}d\theta_1/dt + L_2c_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)) \ 0]^T$$

Acelerações angulares:

$${}^0\boldsymbol{\omega}_0' = [0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{condição inicial})$$

$${}^1\boldsymbol{\omega}_1' = {}^1\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_0' + {}^1z_1 \cdot d^2\theta_1/dt^2 + ({}^1\mathbf{R}_0 \cdot {}^0\boldsymbol{\omega}_0) \times ({}^1z_1 \cdot d\theta_1/dt) = [0 \ 0 \ d^2\theta_1/dt^2]^T$$

$${}^2\boldsymbol{\omega}_2' = {}^2\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_1' + {}^2z_2 \cdot d^2\theta_2/dt^2 + ({}^2\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\boldsymbol{\omega}_1) \times ({}^2z_2 \cdot d\theta_2/dt) = [0 \ 0 \ (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]^T$$

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3' = {}^3\mathbf{R}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2' + {}^3z_3 \cdot d^2\theta_3/dt^2 + ({}^3\mathbf{R}_2 \cdot {}^2\boldsymbol{\omega}_2) \times ({}^3z_3 \cdot d\theta_3/dt) = [0 \ 0 \ (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]^T$$

$$\Rightarrow {}^0\boldsymbol{\omega}_3' = {}^0\mathbf{R}_3 \cdot {}^3\boldsymbol{\omega}_3' = [0 \ 0 \ (d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)]^T$$

Acerações lineares (como todas as juntas são rotacionais, $d(d_i)/dt = 0$ e $d^2(d_i)/dt^2 = 0$):

Para incluir o efeito da gravidade quando se analisa o comportamento dinâmico do robô, faremos uso do seguinte artifício: assumiremos que a base do robô sofre uma aceleração constante para cima igual à aceleração da gravidade g .

$${}^0v_0' = [0 \quad g \quad 0]^T \quad (\text{condição inicial})$$

$${}^1v_1' = {}^1R_0. [{}^0v_0' + {}^0\omega_0' \times {}^0P_1 + {}^0\omega_0' \times ({}^0\omega_0' \times {}^0P_1)] = [s_1g \quad c_1g \quad 0]^T$$

$$\begin{aligned} {}^2v_2' &= {}^2R_1. [{}^1v_1' + {}^1\omega_1' \times {}^1P_2 + {}^1\omega_1' \times ({}^1\omega_1' \times {}^1P_2)] = \\ &= [(s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2) \quad (c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2) \quad 0]^T \end{aligned}$$

$${}^3v_3' = {}^3R_2. [{}^2v_2' + {}^2\omega_2' \times {}^2P_3 + {}^2\omega_2' \times ({}^2\omega_2' \times {}^2P_3)]$$

$$\Rightarrow {}^3v_{3x}' = s_{12}g + L_1s_2d^2\theta_1/dt^2 - L_1c_2(d\theta_1/dt)^2 - L_2(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2$$

$$\Rightarrow {}^3v_{3y}' = c_{12}g + L_1c_2d^2\theta_1/dt^2 + L_1s_2(d\theta_1/dt)^2 + L_2(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)$$

$$\Rightarrow {}^3v_{3z}' = 0$$

$${}^0v_3' = {}^0R_3. {}^3v_3'$$

$$\Rightarrow {}^0v_{3x}' = -L_1s_1d^2\theta_1/dt^2 + L_1c_1(d\theta_1/dt)^2 - L_2c_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2 - L_2s_{12}(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2)$$

$$\Rightarrow {}^0v_{3y}' = L_1c_1d^2\theta_1/dt^2 - L_1s_1(d\theta_1/dt)^2 - L_2s_{12}(d\theta_1/dt + d\theta_2/dt)^2 + L_2c_{12}(d^2\theta_1/dt^2 + d^2\theta_2/dt^2) + g$$

$$\Rightarrow {}^0v_{3z}' = 0$$

3.7. Velocidades generalizadas:

A seguir, derivaremos expressões matriciais compactas para as velocidades de elo. Desta forma, as expressões resultantes serão mais fáceis de manipular. Com este objetivo, definiremos o operador matricial produto vetorial equivalente. Dados dois vetores v e p , o seu produto vetorial pode ser expresso matricialmente da seguinte forma:

$$v \times p = [v \times].p$$

onde $[v \times]$ é o operador matricial produto vetorial, definido como:

$$[v \times] = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

Este operador possui as seguintes propriedades:

$$a) [v \times]^T = -[v \times]$$

b) Dados dois referenciais {A} e {B},

$$[{}^A v \times] {}^A p = {}^A v \times {}^A p = ({}^A R_B {}^B v) \times ({}^A R_B {}^B p) = {}^A R_B ({}^B v \times {}^B p) = {}^A R_B [{}^B v \times] {}^B p$$

Usando o operador matricial para o produto vetorial e lembrando que ${}^0 R_i = ({}^i R_0)^T$, as equações para velocidades de elo angulares e lineares em referencial de base podem ser escritas como:

$${}^0 \omega_i = {}^0 \omega_{i-1} + {}^0 R_i \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt$$

$${}^0 v_i = {}^0 v_{i-1} + [({}^0 R_{i-1} \cdot {}^{i-1} P_i) \times]^T \cdot {}^0 \omega_{i-1} + {}^0 R_i \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt$$

As expressões acima podem ser agrupadas matricialmente da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} {}^0 \omega_i \\ {}^0 v_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ [({}^0 R_{i-1} \cdot {}^{i-1} P_i) \times]^T & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0 \omega_{i-1} \\ {}^0 v_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^0 R_i \cdot {}^i z_i \cdot d\theta_i/dt \\ {}^0 R_i \cdot {}^i z_i \cdot d(d_i)/dt \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0 V_i = [{}^0 L_{i,i-1}]^T \cdot {}^0 V_{i-1} + {}^0 Z_i \cdot dq_i/dt$$

onde, ${}^0 V_i = [{}^0 \omega_i^T \quad {}^0 v_i^T]^T$ é o vetor de velocidades generalizadas do elo {i} expresso em referencial de base. O escalar q_i é a variável da junta i, ($q_i = \theta_i$, se a junta i for rotacional ou $q_i = d_i$, se a junta i for prismática). A matriz 6x6 de localização do elo {i} em relação ao elo {i-1}, expressa em referencial de base, é dada por:

$${}^0 L_{i,i-1} = \begin{bmatrix} I & [({}^0 R_{i-1} \cdot {}^{i-1} P_i) \times] \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Onde I é a matriz identidade 3x3 e 0 é a matriz nula 3x3. A máscara da junta i em referencial de base é definida como:

$${}^0 Z_i = {}^0 [R]_i \cdot {}^i Z_i$$

onde a máscara da junta i é escolhida como ${}^i Z_i = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ se a junta i for rotacional e ${}^i Z_i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ caso a junta i for prismática. A matriz de rotação generalizada 6x6, ${}^0 [R]_i$, permite mapear velocidades generalizadas expressas no elo {i} para a sua representação em referencial de base:

$${}^0 [R]_i = \begin{bmatrix} {}^0 R_i & 0 \\ 0 & {}^0 R_i \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0 V_i = {}^0 [R]_i \cdot {}^i V_i$$

onde ${}^i V_i = [{}^i \omega_i^T \quad {}^i v_i^T]^T$ é o vetor de velocidades generalizadas do elo {i} expresso no seu próprio referencial.

Multiplicando a equação recursiva de velocidades generalizadas por ${}^i[R]_0 = {}^0[R]_i^{-1} = {}^0[R]_i^T$, podemos obter uma representação equivalente, onde as velocidades generalizadas estão expressas no seu próprio referencial:

$${}^i[R]_0 \cdot {}^0V_i = {}^i[R]_0 \cdot [{}^0L_{i,i-1}]^T \cdot {}^0V_{i-1} + {}^i[R]_0 \cdot {}^0Z_i \cdot dq_i/dt = {}^i[R]_0 \cdot [{}^0L_{i,i-1}]^T \cdot {}^0[R]_{i-1} \cdot {}^{i-1}V_{i-1} + {}^iZ_i \cdot dq_i/dt$$

$$\Rightarrow {}^iV_i = [{}^{i-1}L_i]^T \cdot {}^{i-1}V_{i-1} + {}^iZ_i \cdot dq_i/dt$$

onde, a matriz 6x6 de localização do elo {i} em relação ao elo {i-1}, expressa em seu próprio referencial, é dada por:

$${}^{i-1}L_i = {}^{i-1}[R]_0 \cdot {}^0L_{i,i-1} \cdot {}^0[R]_i = \begin{bmatrix} {}^{i-1}R_i & [{}^{i-1}P_i \times] \cdot {}^{i-1}R_i \\ 0 & {}^{i-1}R_i \end{bmatrix}$$

3.8. Jacobiano:

A matriz jacobiana:

Dada a função $P = f(q)$, que relaciona o vetor $q_{N \times 1}$ com o vetor $P_{M \times 1}$, a matriz jacobiana $M \times N$, ou simplesmente Jacobiano, mapeia a derivada de q na derivada de P:

$$dP/dt = J(q) \cdot dq/dt = [\partial f(q)/\partial q^T] \cdot dq/dt$$

$$\Rightarrow J(q) = [\partial f(q)/\partial q^T] = \begin{bmatrix} \partial f_1(q)/\partial q_1 & \dots & \partial f_1(q)/\partial q_M \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_N(q)/\partial q_1 & \dots & \partial f_N(q)/\partial q_M \end{bmatrix}$$

Singularidades do mecanismo:

O Jacobiano contém importante informação estrutural sobre o mecanismo do robô manipulador. O número de linhas linearmente independentes de $J(q)$ é igual ao número de graus de liberdade controláveis em espaço cartesiano. O número de colunas de $J(q)$ é igual ao número de graus de liberdade em espaço de juntas. Seja V o vetor de velocidades em espaço cartesiano e dq/dt o vetor de velocidades em espaço de juntas, então:

$$V = J(q) \cdot dq/dt$$

A partir da expressão acima, é possível expressar as velocidades de junta em função das velocidades em espaço cartesiano. Multiplicando os dois lados por $J(q)^T$ e isolando dq/dt :

$$J(q)^T \cdot V = J(q)^T \cdot J(q) \cdot dq/dt \Rightarrow dq/dt = [J(q)^T \cdot J(q)]^{-1} \cdot J(q)^T \cdot V$$

Se M é maior do que N , os graus de liberdade disponíveis em espaço de juntas são insuficientes para controlar todos os graus de liberdade em espaço cartesiano e só é possível alcançar objetivos dentro de um subespaço de trabalho. Se M é menor do que N , o número de graus de liberdade em espaço de juntas excede o necessário para realizar a tarefa, ou seja, o manipulador é redundante. Se M é igual a N , o número de graus de liberdade em espaço de juntas é suficiente para atingir objetivos gerais em espaço cartesiano, desde que $J(q)$ seja de *rank* completo. Neste caso, a expressão acima pode ser simplificada como:

$$dq/dt = J(q)^{-1} \cdot V$$

Verifica-se que, se para uma dada configuração q , a matriz $J(q)$ for singular, a matriz $J(q)$ não é mais de *rank* completo e a inversão não é possível. As configurações para as quais isto acontece são denominadas Singularidades do Mecanismo:

$$\Rightarrow \text{conjunto de configurações singulares} = \{q / \det(J(q)) = 0\}$$

As singularidades podem ser:

- Singularidades nos limites do espaço de trabalho, (com o braço estendido).
- Singularidades no interior do espaço de trabalho, (geralmente devidas ao alinhamento de dois ou mais eixos de juntas).

Numa singularidade, o manipulador perde um ou mais graus de liberdade em espaço cartesiano. Neste caso, existirão direções ao longo das quais é impossível movimentar a ferramenta, independente da velocidade das juntas:

$$dq/dt = J(q)^{-1} \cdot V \rightarrow \infty$$

Se não tratadas adequadamente no controlador, as singularidades podem levar à geração de referências de velocidades de junta muito elevadas que podem sobrecarregar os atuadores. Em uma aplicação real, nas vizinhanças de uma singularidade, o jacobiano torna-se mal condicionado numericamente. Assim, na prática, é necessário implementar métodos de medição da distância às singularidades e técnicas para contorná-las.

Exemplo: Para um manipulador planar de dois graus de liberdade, determine: a) o jacobiano relacionando velocidades de junta a velocidades em referencial de ferramenta e velocidades de junta a velocidades em referencial de base; b) as singularidades do mecanismo; c) as velocidades de junta necessárias para fazer com que a garra se movimente ao longo do eixo x com velocidade ${}^0v_{3x}$.

a) Como o robô consegue apenas controlar a posição da ferramenta no plano (x,y) a partir do vetor de variáveis de junta $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$, definiremos nossa tarefa de posicionamento em espaço cartesiano como $P = [x \ y]^T$. Desta maneira, as velocidades em espaço cartesiano expressas em referencial de ferramenta e em referencial de base são, respectivamente:

$${}^3(dP/dt) = [{}^3v_{3x} \quad {}^3v_{3y}] = \\ = [(L_1s_2d\theta_1/dt) \quad (L_1c_2d\theta_1/dt+L_2(d\theta_1/dt+d\theta_2/dt))]^T$$

$${}^0(dP/dt) = [{}^0v_{3x} \quad {}^0v_{3y}] = \\ = [(-L_1s_1d\theta_1/dt-L_2s_{12}(d\theta_1/dt+d\theta_2/dt)) \quad (L_1c_1d\theta_1/dt+L_2c_{12}(d\theta_1/dt+d\theta_2/dt))]^T$$

Colocando em evidência as variáveis de junta nas expressões acima, obtemos as matrizes jacobianas em referencial de ferramenta, ${}^3J(q)$, e em referencial de base ${}^0J(q)$:

$${}^3(dP/dt) = {}^3J(q).dq/dt$$

$$\begin{bmatrix} {}^3v_{3x} \\ {}^3v_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1s_2 & 0 \\ (L_1c_2+L_2) & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{bmatrix}$$

$${}^0(dP/dt) = {}^0J(q).dq/dt$$

$$\begin{bmatrix} {}^0v_{3x} \\ {}^0v_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-L_1s_1-L_2s_{12}) & (-L_2s_{12}) \\ (L_1c_1+L_2c_{12}) & (L_2c_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_2/dt \end{bmatrix}$$

b) As singularidades são configurações para as quais $\det(J(q)) = 0$. Assim:

$$\det({}^3J(q)) = \det \begin{bmatrix} L_1s_2 & 0 \\ (L_1c_2+L_2) & L_2 \end{bmatrix} = L_1.L_2.\text{sen}(\theta_2)$$

Ou seja, o mecanismo está em uma configuração singular se $L_1.L_2.\text{sen}(\theta_2) = 0$, que corresponde a $\theta_2 = k.\pi$, com k inteiro. Podemos verificar que:

- k par \Rightarrow braço completamente esticado: singularidade no limite do espaço de trabalho.
- k ímpar \Rightarrow braço dobrado sobre si mesmo: singularidade no interior do espaço de trabalho.

Na singularidade, a garra só pode se movimentar na direção perpendicular ao braço, perdendo o grau de liberdade de movimento na direção radial. Podemos verificar que as singularidades são independentes do referencial no qual é expresso o jacobiano:

$$\det({}^0J(q)) = \det \begin{bmatrix} (-L_1s_1-L_2s_{12}) & (-L_2s_{12}) \\ (L_1c_1+L_2c_{12}) & (L_2c_{12}) \end{bmatrix} = L_1.L_2.\text{sen}(\theta_2) = \det({}^3J(q))$$

c) As velocidades de junta correspondentes à velocidade cartesiana ${}^0V_3 = [{}^0v_{3x} \quad 0]^T$ são:

$$q = {}^0J(q)^{-1} \cdot {}^0V_{3x}$$

$$\begin{bmatrix} d\theta_1/dt \\ d\theta_1/dt \end{bmatrix} = (1/L_1 \cdot L_2 \cdot s_2) \cdot \begin{bmatrix} (L_2 c_{12}) & (L_2 s_{12}) \\ (-L_1 c_{11} - L_2 c_{12}) & (-L_1 s_{11} - L_2 s_{12}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0V_{3x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow d\theta_1/dt = {}^0V_{3x} \cdot c_{12} / (L_1 \cdot s_2) \quad d\theta_2/dt = {}^0V_{3x} \cdot (-L_1 c_{11} - L_2 c_{12}) / (L_1 \cdot L_2 \cdot s_2)$$

Verifica-se que, para $\theta_2 \rightarrow 0$, $d\theta_1/dt$ e $d\theta_2/dt \rightarrow \infty$.

Cálculo do jacobiano:

Determinando a velocidade da garra recursivamente, a partir das velocidades de junta, iniciando da base do manipulador, temos:

$$\Rightarrow {}^iV_i = [{}^{i-1}L_i]^T \cdot {}^{i-1}V_{i-1} + {}^iZ_i \cdot dq_i/dt$$

$${}^0V_0 = 0$$

$${}^1V_1 = {}^0L_1^T \cdot {}^0V_0 + {}^1Z_1 \cdot dq_1/dt = {}^1Z_1 \cdot dq_1/dt$$

$${}^2V_2 = {}^1L_2^T \cdot {}^1V_1 + {}^2Z_2 \cdot dq_2/dt = {}^1L_2^T \cdot {}^1Z_1 \cdot dq_1/dt + {}^2Z_2 \cdot dq_2/dt$$

$${}^3V_3 = {}^2L_3^T \cdot {}^2V_2 + {}^3Z_3 \cdot dq_3/dt = {}^2L_3^T \cdot {}^1L_2^T \cdot {}^1Z_1 \cdot dq_1/dt + {}^2L_3^T \cdot {}^2Z_2 \cdot dq_2/dt + {}^3Z_3 \cdot dq_3/dt$$

⋮
⋮

Adotando a seguinte nomenclatura: ${}^iL_k = {}^iL_{i+1} \cdot {}^{i+1}L_{i+2} \cdot \dots \cdot {}^{k-2}L_{k-1} \cdot {}^{k-1}L_k$, ou, de forma análoga, ${}^kL_i = {}^iL_k^T = {}^{k-1}L_k^T \cdot {}^{k-2}L_{k-1}^T \cdot \dots \cdot {}^{i+1}L_{i+2}^T \cdot {}^{i+1}L_i^T$, a seguinte lei de formação pode ser derivada das equações acima para a velocidade da ferramenta:

$${}^{N+1}V_{N+1} = {}^{N+1}L_1 \cdot {}^1Z_1 \cdot dq_1/dt + {}^{N+1}L_2 \cdot {}^2Z_2 \cdot dq_2/dt + \dots + {}^{N+1}L_{N-1} \cdot {}^{N-1}Z_{N-1} \cdot dq_{N-1}/dt + {}^{N+1}L_N \cdot {}^N Z_N \cdot dq_N/dt$$

$$\Rightarrow {}^{N+1}V_{N+1} = [{}^{N+1}L_1 \cdot {}^1Z_1 \quad {}^{N+1}L_2 \cdot {}^2Z_2 \quad \dots \quad {}^{N+1}L_N \cdot {}^N Z_N] \cdot [dq_1/dt \quad dq_2/dt \quad \dots \quad dq_N/dt]^T$$

$$\text{como } {}^{N+1}V_{N+1} = {}^{N+1}J(q) \cdot dq/dt,$$

$${}^{N+1}J(q) = [{}^{N+1}L_1 \cdot {}^1Z_1 \quad {}^{N+1}L_2 \cdot {}^2Z_2 \quad \dots \quad {}^{N+1}L_N \cdot {}^N Z_N]$$

onde cada coluna i do jacobiano é dada por ${}^{N+1}J_i(q) = {}^{N+1}L_i \cdot {}^iZ_i$. Por outro lado, como as velocidades da garra expressas em referencial de base podem ser obtidas a partir de ${}^{N+1}V_{N+1}$ através de ${}^0V_{N+1} = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}V_{N+1}$ e ${}^0V_{N+1} = {}^0J(q) \cdot dq/dt$, temos:

$${}^0V_{N+1} = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}V_{N+1} = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}J(q) \cdot dq/dt = {}^0J(q) \cdot dq/dt$$

$$\Rightarrow {}^0J(q) = {}^0[R]_{N+1} \cdot {}^{N+1}J(q)$$

Assim, temos o seguinte procedimento recursivo para cálculo do jacobiano (em referencial de ferramenta) de robôs manipuladores seriais genéricos de N juntas, onde cada coluna ${}^{N+1}J_i(q)$ é calculada partindo da ferramenta, (referencial $\{N+1\}$), até a base, (referencial $\{0\}$):

Cálculo recursivo do Jacobiano:

- 1) $i = N+1$
- 2) ${}^{N+1}L_{N+1} = I$
- 3) $i = i-1$
- 4) ${}^iL_{N+1} = {}^iL_{i+1} \cdot {}^{i+1}L_{N+1}$
- 5) ${}^{N+1}J_i(q) = {}^{N+1}L_i \cdot {}^iZ_i$
- 6) enquanto $i > 1$, volte ao passo 3)

Jacobiano quando a orientação é dada por ângulos de Euler:

Considere a orientação da garra em relação à base expressa através de uma tripla de ângulos de Euler ZYZ, ${}^0\Phi_{N+1} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$, de tal modo que a velocidade angular da ferramenta em relação à base seja descrita pela derivada temporal $d({}^0\Phi_{N+1})/dt$. Considere a posição da garra em relação à base dada expressa através do vetor de posição ${}^0P_{N+1}$, de tal modo que a velocidade linear da ferramenta em relação à base seja descrita pela derivada temporal $d({}^0P_{N+1})/dt$. Definimos o vetor de localização generalizado da ferramenta em relação à base como:

$${}^0L_\Phi = [{}^0\Phi_{N+1}^T \quad {}^0P_{N+1}^T]^T$$

A partir de ${}^0L_\Phi$, podemos definir o vetor de velocidades generalizadas em eixos móveis como:

$${}^0V_\Phi = d({}^0L_\Phi)/dt = [(d({}^0\Phi_{N+1})/dt)^T \quad (d({}^0P_{N+1})/dt)^T]^T$$

Da mesma forma que para as velocidades generalizadas ${}^0V_{N+1}$, podemos obter a relação entre ${}^0V_\Phi$ e o vetor de velocidades de junta dq/dt , através de uma matriz jacobiana ${}^0J_\Phi(q)$:

$${}^0V_\Phi = {}^0J_\Phi(q) \cdot dq/dt$$

$$\text{onde } {}^0J_\Phi(q) = \partial {}^0L_\Phi(q) / \partial q^T.$$

A derivada $d({}^0P_{N+1})/dt$ representa a velocidade linear da ferramenta, ${}^0v_{N+1}$. Por outro lado, o vetor de velocidade angular da ferramenta ${}^0\omega_{N+1}$ se relaciona com $d({}^0\Phi_{N+1})/dt$ através da matriz R_Φ :

$${}^0\omega_{N+1} = \begin{bmatrix} 0 & -s\phi & c\phi s\theta \\ 0 & c\phi & s\phi s\theta \\ 1 & 0 & c\theta \end{bmatrix} d({}^0\Phi_{N+1})/dt = R_\Phi \cdot d({}^0\Phi_{N+1})/dt$$

Lembrando que ${}^0V_{N+1} = [{}^0\omega_{N+1}^T \quad {}^0v_{N+1}^T]^T$, temos:

$${}^0V_{N+1} = T_\Phi \cdot {}^0V_\Phi$$

Na equação acima, a matriz T_Φ é dada por:

$$T_\Phi = \begin{bmatrix} R_\Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

Onde \mathbf{I} e $\mathbf{0}$ representam a matriz identidade 3×3 e a matriz nula 3×3 , respectivamente..
Como ${}^0V_\Phi = {}^0J_\Phi(q) \cdot dq/dt$, temos:

$${}^0V_{N+1} = T_\Phi \cdot {}^0V_\Phi = T_\Phi \cdot {}^0J_\Phi(q) \cdot dq/dt$$

Por outro lado, ${}^0V_{N+1} = {}^0J(q) \cdot dq/dt$. Assim, comparando estas duas expressões, temos

$${}^0J(q) = T_\Phi \cdot {}^0J_\Phi(q)$$

Exemplo: dado o manipulador articulado planar de três graus de liberdade mostrado na figura abaixo, determine o jacobiano que relaciona o vetor de velocidades de junta, dq/dt , com o vetor de velocidades generalizadas, ${}^0V_\Phi = d^0L_\Phi/dt = [dx/dt \quad dy/dt \quad d\phi/dt]^T$, onde (x,y) é a posição da ferramenta e ϕ é o seu ângulo de orientação em relação ao eixo x.

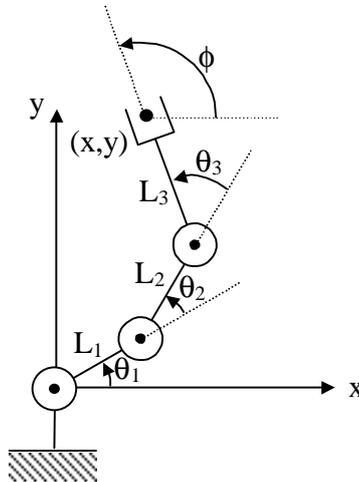


Figura 3.10. Robô manipulador articulado planar com três graus de liberdade.

A localização da ferramenta em relação à base pode ser determinada facilmente através do cálculo da cinemática direta do robô, ${}^0L_\Phi = [x \quad y \quad \phi]^T$, onde:

$$x = L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123}$$

$$y = L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123}$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Derivando o vetor de localização ${}^0L_\Phi$ em relação ao tempo, obtemos o vetor de velocidades generalizadas ${}^0V_\Phi = d{}^0L_\Phi/dt = [dx/dt \quad dy/dt \quad d\phi/dt]^T$ em função das velocidades de juntas dq/dt , onde:

$$dx/dt = -(L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123})d\theta_1/dt - (L_2.s_{12} + L_3.s_{123})d\theta_2/dt - (L_3.s_{123})d\theta_3/dt$$

$$dy/dt = (L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123})d\theta_1/dt + (L_2.c_{12} + L_3.c_{123})d\theta_2/dt + (L_3.c_{123})d\theta_3/dt$$

$$d\phi/dt = d\theta_1/dt + d\theta_2/dt + d\theta_3/dt$$

Colocando em evidência as velocidades de junta podemos obter a expressão matricial:

$${}^0V_\Phi = {}^0J_\Phi(q).dq/dt$$

onde o jacobiano ${}^0J_\Phi(q)$ é dado por:

$${}^0J_\Phi(q) = \begin{bmatrix} -(L_1.s_1 + L_2.s_{12} + L_3.s_{123}) & -(L_2.s_{12} + L_3.s_{123}) & -(L_3.s_{123}) \\ (L_1.c_1 + L_2.c_{12} + L_3.c_{123}) & (L_2.c_{12} + L_3.c_{123}) & (L_3.c_{123}) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$