

Sistemas Lineares

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

DCA – CT – UFRN
<http://www.dca.ufrn.br/~diogo/>

1 Introdução

Sistemas lineares têm uma enorme aplicação prática em diversas áreas de engenharia. Por exemplo, eles são comumente empregados na análise de circuitos elétricos.

Os sistemas lineares trabalham com equações lineares do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

onde a_i , com $i = 1, 2, \dots, n$, são os coeficientes, x_i são as incógnitas e b é o termo independente.

Em um sistema linear há n equações lineares com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que na forma matricial pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde A é a matriz dos coeficientes, \mathbf{b} é o vetor dos termos independentes e \mathbf{x} é o vetor das incógnitas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para solucionar um sistema linear, deve-se encontrar um vetor $\mathbf{x}' = [x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n]^T$, chamado de vetor solução, tal que a igualdade $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ seja satisfeita.

2 Classificação

Os sistemas lineares podem ser classificados quanto ao número de soluções em *compatível*, quando apresenta solução, e em *incompatível*, que é quando o sistema linear não apresenta a solução.

Exemplo. Seja o sistema linear $A\mathbf{x} = [0]_{n \times 1}$, onde $[0]_{n \times 1}$ é um vetor de n elementos iguais a zero. Qualquer sistema linear deste tipo, onde os termos independentes são nulos, é um sistema compatível pois admite, pelo menos, a solução trivial $\mathbf{x} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$. Este sistema também é chamado de homogêneo.

Exemplo. Classificar o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Este sistema é incompatível pois realizando a análise geométrica (figura 1), percebe-se que consiste em duas retas paralelas, caracterizando a ausência de uma solução comum.

Os sistemas compatíveis, por sua vez, podem ser classificados como *determinados*, se o sistema apresentar uma única solução, ou *indeterminados*, caso apresente infinitas soluções.

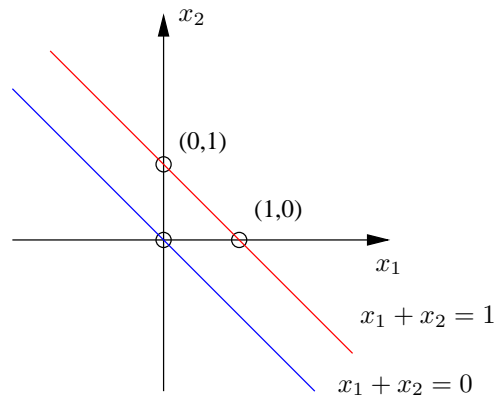


Figura 1: Análise geométrica de um sistema incompatível.

Exemplo. Classificar os sistemas compatíveis a seguir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Procedendo com a mesma análise geométrica, vê-se que os sistemas possuem uma solução única pois as retas se cruzam na origem (figura 2). Assim, sistema é determinado e o vetor solução é $\mathbf{x} = [0 \ 0]^T$.

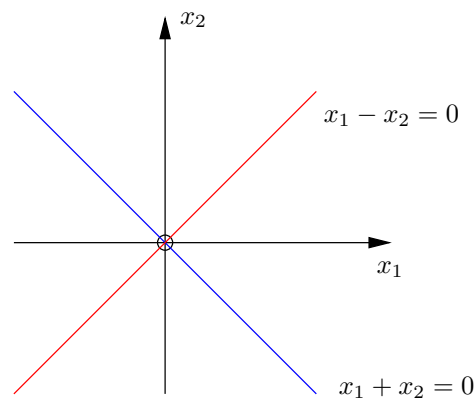


Figura 2: Análise geométrica de um sistema compatível determinado.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Já a análise geométrica deste sistema mostra que as duas retas são iguais (figura 3). Neste caso, há infinitas soluções para o sistema, o que o classifica como indeterminado.

3 Sistemas Triangulares

Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é chamado de triangular se os elementos, da matriz de coeficientes, localizados acima, ou abaixo, da diagonal principal forem iguais a zero.

Dado A , se $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$, tal que $i, j = 1, 2, \dots, n$, o sistema é *triangular inferior*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

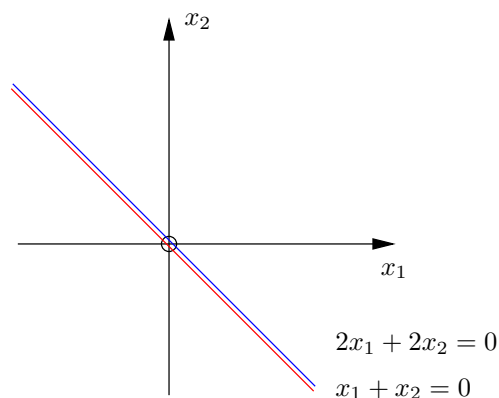


Figura 3: Análise geométrica de um sistema compatível indeterminado.

Se $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$, tal que $i, j = 1, 2, \dots, n$, o sistema é então *triangular superior*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$, então o sistema triangular é determinado e a solução pode ser facilmente encontrada através dos métodos de substituição progressiva (triangular inferior) ou retroativa (triangular superior).

Exemplo. Resolver o sistema a seguir por substituição retroativa.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Pela última equação deste sistema é possível determinar o valor de x_4 . Assim, tem-se:

$$x_4 = \frac{2}{2} \Rightarrow x_4 = 1$$

Este valor de x_4 é substituído na penúltima equação para a determinação de x_3 :

$$\begin{aligned} 4x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 4x_3 - 5 \cdot 1 &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo procedimento para calcular x_2 na segunda equação, tem-se:

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ x_2 + 2 - 2 \cdot 1 &= -1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

E, por fim, para x_1 na primeira equação o procedimento é:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -10 \\ 3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 &= -10 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

O vetor solução encontrado é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.1 Algoritmo da Substituição Retroativa

Para realizar numericamente o procedimento para calcular o vetor solução de sistemas triangulares superior, deve-se seguir os procedimentos do seguinte algoritmo.

```

x(n) = b(n)/A(n,n);
Para r variando de (n-1) até 1
  SOMA = 0;
  Para j variando de (r+1) até n
    SOMA = SOMA + A(r,j)*x(j);
  Fim
  x(r) = (b(r) - SOMA)/A(r,r)
Fim

```

Como dados de entrada, é necessário a matriz do coeficiente A , o vetor de termos independentes \mathbf{b} e a ordem de A (n). Outra observação importante é que este método de resolução somente é aplicado para sistemas lineares compatíveis.

4 Transformações Básicas

São operações efetuadas sobre um sistema linear com o intuito de obter outro sistema equivalente:

1. Trocar a ordem de duas equações do sistema;
2. Multiplicar uma equação do sistema por uma constante não-nula;
3. Adicionar duas equações.

Salienta-se que dois sistemas equivalentes ou são incompatíveis ou ambos têm as mesmas soluções.

5 Métodos Diretos

Os sistemas lineares podem ser resolvidos numericamente através dos métodos diretos. Estes métodos determinam a solução do sistema através de um número finito de operações sobre o sistema.

5.1 Método de Gauss

Também conhecido como Método da Eliminação Gaussiana. Consiste em, com $(n - 1)$ passos, transformar um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em um outro triangular superior (ou inferior) equivalente que pode ser facilmente resolvido por substituição retroativa (ou progressiva).

O processo trabalha de maneira mais prática com a matriz aumentada $[A\mathbf{b}]$. Ela consiste em uma matriz $n \times (n + 1)$ onde a $(n + 1)$ -ésima coluna é o vetor dos termos independentes, enquanto os outros elementos são da própria matriz dos coeficientes.

$$[A\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo. Dado o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

aplicar o método de Gauss para encontrar a matriz triangular equivalente.

A matriz aumentada do sistema é:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a técnica do pivotamento, ou seja, escolhendo o elemento a_{11} como pivô, para eliminar o coeficiente de x_1 da segunda linha, tem-se:

$$m = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

Dessa forma, os novos valores dos elementos da segunda linha serão resultantes da subtração entre os elementos antigos da segunda linha e os elementos da primeira linha multiplicados por m , ou seja:

$$L_2 \leftarrow L_2 - m \cdot L_1$$

A matriz aumentada resultante é dada por:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar o coeficiente de x_1 na terceira linha, calcula-se um novo multiplicador:

$$m = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{2} = 1$$

o qual é utilizado para multiplicar a primeira linha para, então, ser subtraída da terceira linha. Assim, tem-se $L_3 \leftarrow L_3 - m \cdot L_1$, o que resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Passa-se, agora, para eliminação do coeficiente de x_2 da terceira linha. O procedimento é similar aos anteriores, porém utiliza-se o coeficiente de x_2 (a_{22}) da segunda linha como o pivô. O multiplicador é calculado através de:

$$m = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Fazendo $L_3 \leftarrow L_3 - m \cdot L_2$, tem-se como resultado final uma matriz triangular superior aumentada equivalente.

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

Este novo sistema linear pode ser facilmente solucionado através da aplicação do algoritmo da substituição retroativa. O vetor solução é:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

5.1.1 Algoritmo de Gauss

O algoritmo mostra como se pode implementar um programa para calcular numericamente a matriz triangular equivalente. No entanto, se algum elemento da diagonal principal da matriz A for igual a zero, ele não poderá ser utilizado. Torna-se necessário, desta maneira, encontrar uma outra linha na matriz em que o coeficiente na posição equivalente seja diferente de zero. Encontrada essa linha, deve-se realizar uma permuta, de forma a retirar o valor zero da diagonal principal. Caso seja impossível encontrar essa linha, o sistema não é determinado.

Os dados de entrada são a matriz aumentada e a ordem n do sistema. Para efeitos de notação no algoritmo, os elementos $AB(\cdot)$ são da matriz aumentada.

```

Para p variando de 1 até (n-1)
  Para r variando de (p+1) até n
    m = AB(r,p)/AB(p,p);
    AB(r,p) = 0;
    Para c variando de (p+1) até (n+1)
      AB(r,c) = AB(r,c) - m*AB(p,c)
    Fim
  Fim
Fim

```

5.2 Método do Pivotamento Parcial

Em uma eliminação gaussiana, se algum elemento $a_{k,k} = 0$ na k -ésima iteração, o programa que está executando este método irá acusar erro, pois indicará uma divisão por zero, o que levará a crer que o sistema é incompatível ou indeterminado.

Exemplo. Dado o sistema a seguir, encontrar um sistema triangular superior equivalente através do método de Gauss.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

A matriz aumentada $[Ab]$ do sistema é:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escolhendo o elemento a_{11} como primeiro pivô, tem-se que:

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

Executando a operação $L_2 \leftarrow L_2 - m \cdot L_1$ a matriz aumentada fica igual a:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Percebe-se que o elemento a_{22} desta matriz modificada é igual a 0, o que inviabilizará a continuação do método de Gauss. Para evitar isto, procede-se com a troca de linhas da matriz aumentada do sistema. A idéia principal é escolher como pivô o elemento de maior módulo da coluna analisada e permutar as linhas do elemento que está na posição do pivô antigo, ou seja, na diagonal principal. Este procedimento tem a vantagem de garantir estabilidade numérica para a solução do sistema.

Exemplo. Aplicar o método do pivotamento parcial para resolver o seguinte sistema, fixando 3 casas decimais:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

A matriz aumentada é:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1,000 & 1,000 & 2,000 & 8,000 \\ -1,000 & -2,000 & 3,000 & 1,000 \\ 3,000 & -7,000 & 4,000 & 10,000 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é determinar o elemento de maior módulo da *primeira coluna*. Neste caso, este elemento é $a_{31} = 3,000$. Deseja-se que este elemento seja o pivô para proceder com a eliminação gaussiana, ou seja, deseja-se que o valor 3 esteja na posição do elemento a_{11} . Assim, realiza-se uma permutação entre a primeira e terceira linha da matriz aumentada. O resultado é:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 3,000 & -7,000 & 4,000 & 10,000 \\ -1,000 & -2,000 & 3,000 & 1,000 \\ 1,000 & 1,000 & 2,000 & 8,000 \end{bmatrix}$$

Uma vez permutada as linhas, passa-se para o processo de eliminação dos elementos da *primeira coluna* que estão abaixo da diagonal principal. O procedimento é o mesmo do método de Gauss. Assim, o multiplicador da segunda linha, calculado na primeira coluna, é:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-1,000}{3,000} = -0,333$$

Para alterar os elementos da segunda linha, zerando assim o elemento a_{21} , faz-se $L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$, o que resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 3,000 & -7,000 & 4,000 & 10,000 \\ 0,000 & -4,333 & 4,333 & 4,333 \\ 1,000 & 1,000 & 2,000 & 8,000 \end{bmatrix}$$

Passa-se, agora, para a eliminação do elemento a_{31} , utilizando o seguinte multiplicador:

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{1,000}{3,000} = 0,333$$

A operação sobre a terceira linha é $L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1$, resultando em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 3,000 & -7,000 & 4,000 & 10,000 \\ 0,000 & -4,333 & 4,333 & 4,333 \\ 0,000 & 3,333 & 0,667 & 4,667 \end{bmatrix}$$

O passo seguinte é encontrar o elemento de maior módulo na *segunda coluna*. Neste caso, não é possível escolher o elemento $a_{12} = -7,000$ porque assim o elemento a_{22} , da diagonal principal, iria ser eliminado. A regra geral que se aplica ao método do pivotamento parcial é que a busca pelo elemento de maior módulo, que vai ser o pivô no processo de eliminação gaussiana, é realizada dos elementos da própria diagonal principal para baixo. Neste exemplo específico, deve-se realizar esta busca entre os elementos $a_{22} = -4,333$ e $a_{32} = 3,333$. Sendo a_{22} com maior módulo, ele é escolhido como pivô. Uma vez que este pivô está na diagonal principal da matriz, não há necessidade de permutação de linhas. Assim, deve-se eliminar o elemento a_{32} para concluir o processo de triangularização. O valor do multiplicador é:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{3,333}{-4,333} = -0,769$$

e a operação sobre a terceira linha resume-se a $L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2$, resultando na seguinte matriz triangular equivalente.

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 3,000 & -7,000 & 4,000 & 10,000 \\ 0,000 & -4,333 & 4,333 & 4,333 \\ 0,000 & 0,000 & 3,999 & 7,999 \end{bmatrix}$$

Para encontrar o vetor solução x basta aplicar o método da substituição retroativa. A solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 3,000 \\ 1,000 \\ 2,000 \end{bmatrix}$$

5.2.1 Algoritmo do Pivotamento Parcial

Para este algoritmo é necessário o conhecimento da matriz aumentada do sistema e da ordem n da matriz A . O programa para a eliminação gaussiana utilizando o pivotamento parcial será dividido em três partes. A primeira é responsável pela busca do maior elemento da coluna. A segunda parte realiza a permutação de linhas e, por fim, a terceira parte cuida da eliminação dos elementos.

```

Para k variando de 1 até n-1
  MAX = abs(AB(k,k));
  M = k;
  Para i variando de k+1 até n
    Se abs(AB(i,k)) > MAX então
      MAX = abs(AB(i,k));
      M = i;
    Fim
  Fim
  Se M for diferente de k então
    Para j variando de k até n
      TEMP = AB(k,j);
      AB(k,j) = AB(M,j);
      AB(M,j) = TEMP;
    Fim
  Fim
  Se AB(k,k) for diferente de 0
    Para l variando de k+1 até n
      m = AB(l,k)/AB(k,k);
      Para c variando de k até n+1
        AB(l,c) = AB(l,c) - m*AB(k,c);
      Fim
    Fim
  Senão
    Exibir mensagem de erro: ‘‘Divisão por zero!’’;
    Sair do programa;
  Fim
Fim

```

A função `abs()`, em Scilab, dá o valor absoluto de um número.

5.3 Método de Jordan

Consiste em operar transformações elementares sobre as equações do sistema linear dado até que se obtenha um sistema diagonal equivalente. Em uma matriz tratada pelo método de Jordan, o cálculo do determinante é trivial.

Um sistema diagonal é aquele em que os elementos a_{ij} , da matriz de coeficientes A , são iguais a 0 para $i \neq j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Exemplo. Dado o sistema linear a seguir, encontrar um sistema equivalente pelo método de Jordan.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo é eliminar o coeficiente a_{21} . Para isso faz-se $L_2 \leftarrow L_2 - m \cdot L_1$, onde

$$m = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

o que resulta em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

O segundo passo é eliminar o coeficiente a_{31} com $L_3 \leftarrow L_3 - m \cdot L_1$. Estas operações resultam em:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

O terceiro passo consiste em eliminar o coeficiente a_{12} utilizando o elemento a_{22} como pivô. O procedimento é $L_1 \leftarrow L_1 - mL_2$. Este procedimento é repetido para todas as linha $i \neq j$, tomando os elementos a_{ii} como o pivô, sempre. Os alunos são encorajados a concluírem o restante do exercício, que resulta na seguinte matriz aumentada:

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

5.3.1 Algoritmo de Jordan

Todos estes procedimentos apresentados podem ser calculados computacionalmente através do seguinte algoritmo, que tem como dados de entrada a matriz aumentada do sistema (cujos elementos são chamados de $AB(\cdot)$) e a ordem n do sistema.

```

Para k variando de 1 até n
  Para i variando de 1 até n
    Se i é diferente de k fazer
      m = AB(i,k)/AB(k,k);
      Para j variando de k até n+1
        AB(i,j) = AB(i,j) - m*AB(k,j);
      Fim
    Fim
  Fim
Fim

```

Este algoritmo tem as mesmas restrições que o método de Gauss possui: os elementos da diagonal principal precisam ser diferentes de zero.

5.4 Método LU

O método LU também é conhecido como método da decomposição LU ou método da fatoração LU. O seu objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes A em um produto entre duas matrizes L e U . Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} Ax &= \mathbf{b} \\ LUx &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

A matriz L é triangular inferior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. A matriz U , por sua vez, é triangular superior com os elementos da diagonal principal diferentes de 0. Estas matrizes são definidas a seguir.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

onde os elementos $m_{i,j}$, $i > j$ e $j = 1, 2, \dots, n$, são os multiplicadores utilizados para os métodos diretos anteriores. Os elementos $a_{i,j}^{(k)}$, com $i \geq j$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, são os elementos da matriz A que são modificados com o processo de triangularização (ou eliminação dos elementos abaixo da diagonal principal). O índice k , com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, indica a quantidade de operações que foi realizada sobre estes elementos.

Definindo o vetor \mathbf{y} como $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$, pode-se obter \mathbf{x} resolvendo:

$$\begin{aligned} Ly &= \mathbf{b} && \text{resolvendo para } \mathbf{y} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} && \text{resolvendo para } \mathbf{x} \end{aligned}$$

O sistema para \mathbf{y} resolve-se por substituição progressiva, enquanto para \mathbf{x} é através de substituição retroativa. Porém, o processo numérico de triangularização é realizado de forma a gerar os elementos das matrizes L e U nas posições dos elementos da matriz A , na matriz aumentada $[A\mathbf{b}]$. Este processo também gera o vetor \mathbf{y} na $(n+1)$ -ésima coluna da matriz aumentada. A solução do sistema é obtida através do método da substituição reversa do sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, eliminando a necessidade de resolver $Ly = \mathbf{b}$.

5.4.1 Algoritmo do Método LU

Este algoritmo executa a substituição dos elementos da matriz aumentada $[A\mathbf{b}]$ pelos elementos das matrizes L e U , o que simplifica o processo de achar a solução, uma vez que há somente um sistema $Ly = \mathbf{b}$ para resolver. Os dados de entrada são a matriz aumentada do sistema $Ax = \mathbf{b}$, juntamente com a ordem do sistema. A nomenclatura adotada para a matriz aumentada neste algoritmo foi AB .

```

Para p variando de 1 até (n-1)
  Para r variando de (p+1) até n
    m = AB(r,p)/AB(p,p);
    AB(r,p) = m;
    Para c variando de (p+1) até (n+1)
      AB(r,c) = AB(r,c) - m*AB(p,c)
    Fim
  Fim
Fim

```

5.5 Refinamento de Soluções

Nas operações com números exatos os erros de arredondamento são inexistentes e, portanto, os resultados são exatos. Porém, ao trabalhar com métodos numéricos, os erros de arredondamento podem comprometer o resultado de um sistema linear, por exemplo.

Para melhorar a solução do sistema linear, utiliza-se o chamado refinamento de soluções. Uma medida para avaliar a precisão dos cálculos é chamada de resíduo:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(*)}$$

onde $\mathbf{x}^{(*)}$ é o vetor solução.

Exemplo. Refinar a solução do sistema:

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 3,0x_2 + 9,3x_3 + 11,0x_4 = 16,4 \\ 24,5x_1 - 8,8x_2 + 11,5x_3 - 45,1x_4 = -49,7 \\ 53,3x_1 - 8,8x_2 - 23,5x_3 + 11,4x_4 = -80,8 \\ 21,0x_1 - 81,0x_2 - 13,2x_3 + 21,5x_4 = -106,3 \end{cases}$$

O vetor solução deste sistema, que pode ser calculado numericamente através da aplicação dos métodos de Gauss ou Jordan e da aplicação do método da substituição retroativa, é:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,97 \\ 1,98 \\ -0,97 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

O resíduo, calculado da maneira exposta anteriormente, é:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,214 \\ 0,594 \\ -0,594 \end{bmatrix}$$

Vê-se que, pelo resíduo, a precisão do resultado não alcança um dígito significativo. O vetor solução $\mathbf{x}^{(0)}$ é chamado de solução aproximada.

Para melhorar esta solução, considera-se um novo vetor $\mathbf{x}^{(1)}$ chamado de solução melhorada, de tal forma que $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)}$, onde $\boldsymbol{\delta}^{(0)}$ é o vetor de correção. Assim:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{b} \\ A(\mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)}) &= \mathbf{b} \\ A\mathbf{x}^{(0)} + A\boldsymbol{\delta}^{(0)} &= \mathbf{b} \\ A\boldsymbol{\delta}^{(0)} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(0)} \\ A\boldsymbol{\delta}^{(0)} &= \mathbf{r}^{(0)} \end{aligned}$$

Assim, resolvendo-se este sistema, tem-se o valor do vetor de correção que pode ser utilizado para encontrar o vetor solução melhorada.

Exemplo. Utilizando o exemplo anterior, encontrar a solução melhorada.

Para calcular o vetor correção, deve-se encontrar a solução do sistema $A\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}$. Assim:

$$\begin{bmatrix} 8,7 & 3,0 & 9,3 & 11,0 \\ 24,5 & -8,8 & 11,5 & -45,1 \\ 52,3 & -84,0 & -23,5 & 11,4 \\ 21,0 & -81,0 & -13,2 & 21,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,214 \\ 0,594 \\ -0,594 \end{bmatrix}$$

A solução é:

$$\boldsymbol{\delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,0295 \\ 0,0195 \\ -0,0294 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, a solução melhorada será:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 2,0000 \\ -0,9999 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

cujo novo resíduo é:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,009 \\ -0,011 \\ 0,024 \\ 0,013 \end{bmatrix}$$

que já apresenta uma precisão de um dígito significativo.

Seguindo o procedimento para refinar ainda mais a solução, tem-se que $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \boldsymbol{\delta}^{(1)}$. O vetor correção, calculado por $A\boldsymbol{\delta}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)}$, é:

$$\boldsymbol{\delta}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0002 \\ -0,0007 \\ 0,0000 \end{bmatrix}$$

resultando em uma solução melhorada igual a:

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 2,0000 \\ -1,0000 \\ 1,0000 \end{bmatrix}$$

cujo resíduo é:

$$\mathbf{r}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6 Métodos Iterativos

Consiste em uma técnica de resolução de sistemas lineares em que a solução é obtida através de uma seqüência de aproximações para os valores do vetor solução \mathbf{x} , até que uma precisão pré-estabelecida seja alcançada. Em outras palavras, dado um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ do vetor solução, deve-se encontrar uma seqüência $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$, de forma que $A\mathbf{x}^{(k)} \cong \mathbf{b}$, respeitando a tolerância desejada. Esta tolerância é o número de dígitos significativos corretos da solução obtida pelos métodos iterativos.

Há dois métodos principais:

1. Método de Jacobi; e
2. Método de Gauss-Siedel.

Observações. Os métodos diretos são apropriados para sistemas de pequeno porte com matrizes de coeficientes densos. Já os métodos iterativos se prestam para a resolução de sistemas de grande porte com matrizes de coeficientes esparsas.

6.1 Método de Jacobi

Dado o sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

as aproximações para o vetor \mathbf{x} são dadas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{n-1}) \end{aligned}$$

ou, de maneira mais compacta, através de:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right]$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Nestas equações considera-se que $a_{ii} \neq 0$. Caso isto algum elemento da diagonal principal for nulo, deve-se permutar linhas para reorganizar o sistema. Se não houver possibilidade de permutação de linhas então o sistema é indeterminado ou incompatível.

Exemplo. Resolver o sistema linear a seguir considerando uma tolerância igual a 0,01, o número máximo de iterações igual a 10 e a estimativa inicial do vetor solução igual a $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0]^T$.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Isolando x_1 na primeira equação e x_2 na segunda, tem-se a equação que rege as estimativas do vetor solução. Assim:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{x_2^{(k)}}{2} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{3}{2} - \frac{x_1^{(k)}}{2} \end{cases}$$

Para $k = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2} + \frac{x_2^{(0)}}{2} = 0,5 \\ x_2^{(1)} = \frac{3}{2} - \frac{x_1^{(0)}}{2} = 1,5 \end{cases}$$

Assim, a estimativa seguinte para a solução do sistema é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Para ver se a tolerância desejada foi atingida, utiliza-se um vetor erro \mathbf{e} que é dado pelo módulo da diferença entre a estimativa da solução atual e a estimativa anterior. Deste modo, tem-se:

$$\mathbf{e} = \left| \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \right| = \left| \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}$$

Tendo este vetor erro, toma-se o seu maior elemento. Dessa forma, se $\max(\mathbf{e}) \leq 0,01$ ou $k > 10$ então o processo deve parar. Como $\max(\mathbf{e}) = 1,5$ e $k = 0$ então as condições citadas não são atendidas. Assim, passa-se para a iteração seguinte.

Para $k = 1$ tem-se:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{x_2^{(1)}}{2} = 1,25 \\ x_2^{(2)} = \frac{3}{2} - \frac{x_1^{(1)}}{2} = 1,25 \end{cases}$$

A nova estimativa para a solução do sistema é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 1,25 \end{bmatrix}$$

E o erro é:

$$\mathbf{e} = \left| \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1,25 \\ 1,25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,25 \end{bmatrix}$$

Com seu valor máximo igual a 0,75. Assim, mais uma vez a aproximação não atendeu à solução do sistema, pois o erro máximo é maior que a tolerância pré-estabelecida e as iterações ainda não chegaram no valor máximo. Este processo é repetido até a tolerância ser atendida, que neste exemplo específico ocorre quando $k = 8$.

6.1.1 Algoritmo do Método de Jacobi

Para este algoritmo utiliza-se, como dados de entrada, a matriz dos coeficientes A , o vetor dos termos independentes \mathbf{b} , a estimativa inicial da solução $\mathbf{x}^{(0)}$, a tolerância TOL, o número máximo de iterações MAX e a ordem da matriz A , n .

```

Para k variando de 0 até MAX
  xant = x;
  Para i variando de 1 até n
    SOMA = 0;
    Para j variando de 1 até n
      Se i for diferente de j então
        SOMA = SOMA + A(i,j)*xant(j);
      Fim
    Fim
    x(i) = (b(i) - SOMA)/A(i,j);
  Fim
  erro = abs(x - xant);
  Se max(erro) < TOL então
    Apresentar o vetor x;
    Sair do programa.
  Fim
Fim
Exibir a mensagem: ‘‘0 sistema não convergiu em MAX iterações!’’

```

6.2 Método de Gauss-Siedel

É uma modificação do Método de Jacobi visando acelerar o processo de convergência. Nele, o valor recém calculado de $x_i^{(k+1)}$ é utilizado para calcular $x_{i+1}^{(k+1)}$. A equação que descreve as aproximações é:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$.

6.2.1 Algoritmo de Gauss-Siedel

Este algoritmo é bastante similar ao de Jacobi. Os dados de entrada são os mesmos e a diferença reside em algumas linhas.

```

Para k variando de 0 até MAX
  xant = x;
  Para i variando de 1 até n
    SOMA = 0;
    Para j variando de 1 até n

```

```

    Se i for diferente de j então
      SOMA = SOMA + A(i,j)*x(j);
    Fim
  Fim
  x(i) = (b(i) - SOMA)/A(i,j);
Fim
erro = abs(x - xant);
Se max(erro) < TOL então
  Apresentar o vetor x;
  Sair do programa.
Fim
Fim
Exibir a mensagem: ‘‘0 sistema não convergiu em MAX iterações!’’

```

7 Exercícios

1. Resolva os sistemas a seguir utilizando os métodos diretos apresentados (Gauss, Pivotamento Parcial e LU). Utilize o método da substituição retroativa para encontrar o vetor solução. Implemente em Scilab os algoritmos mostrados em sala de aula e compare os resultados.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6,90 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = -6,60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10,20 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = -12,30 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 7,12 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 12,02 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 14,90 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 20,72 \end{array} \right.$$

2. Resolva os sistemas a seguir utilizando os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Siedel, definindo a tolerância igual a 0,01, o número máximo de iterações iguais a 20 e estimativa inicial igual a $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Estes sistemas devem ser resolvidos através dos programas implementados em Scilab.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - 0,25x_2 - 0,25x_3 = 0 \\ -0,25x_1 + x_2 - 0,25x_4 = 0 \\ -0,25x_1 + x_3 - 0,25x_4 = 0,25 \\ -0,25x_2 + x_4 = 0,25 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 8x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -1 \end{array} \right.$$

3. Resolver pelos mesmos métodos iterativos, porém com aproximação inicial igual a $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ -8x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 13 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 10x_4 + 2x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 7x_5 = 7 \end{array} \right.$$

4. Para este sistema $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ e a tolerância é igual a 10^{-4} .

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 6,57 \\ 4x_1 - 20x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 + 7x_6 = -68,448 \\ 5x_1 - 3x_2 + 15x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = -112,05 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 - x_5 + 2x_6 = -3,968 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 9x_5 - x_6 = -2,18 \\ -4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + 12x_6 = 10,882 \end{cases}$$

Referências

- [1] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. C. Filho, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.
- [2] *Métodos Computacionais em Engenharia – Notas de Aula*; Paulo Sérgio da Motta Pires; UFRN, CT, DCA, <http://www.dca.ufrn.br/~pmotta>, 2004.