Raízes de Equações Não-Lineares

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
URL: `http://www.dca.ufrn.br/~diogo/`
E-mail: `diogo@dca.ufrn.br`

1 Introdução

Em engenharia e nas ciências exatas é comum deparar-se com problemas que requerem o cálculo da raiz de uma função $f(x)$. Ou seja, dada esta função $f(x)$, deseja-se encontrar um número $x = \xi$ tal que $f(\xi) = 0$. Esta função pode ter as seguintes formas:

1. Função algébrica: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3-2}} - 20x$;
2. Função transcedente: $f(x) = x \cdot \tan(x) - 1$;
3. Função polinomial: $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + 2x - 2$.

Algumas funções podem ter suas raízes calculadas analiticamente, porém outras são mais complexas e possuem suas raízes calculadas por métodos numéricos. Para isto, duas etapas devem ser seguidas:

1. Achar um intervalo fechado $[a, b]$ que contenha somente uma raiz;
2. Melhorar o valor da raiz aproximada.

Ambas as etapas serão melhor detalhadas nas seções seguintes.

1.1 Isolamento de Raízes

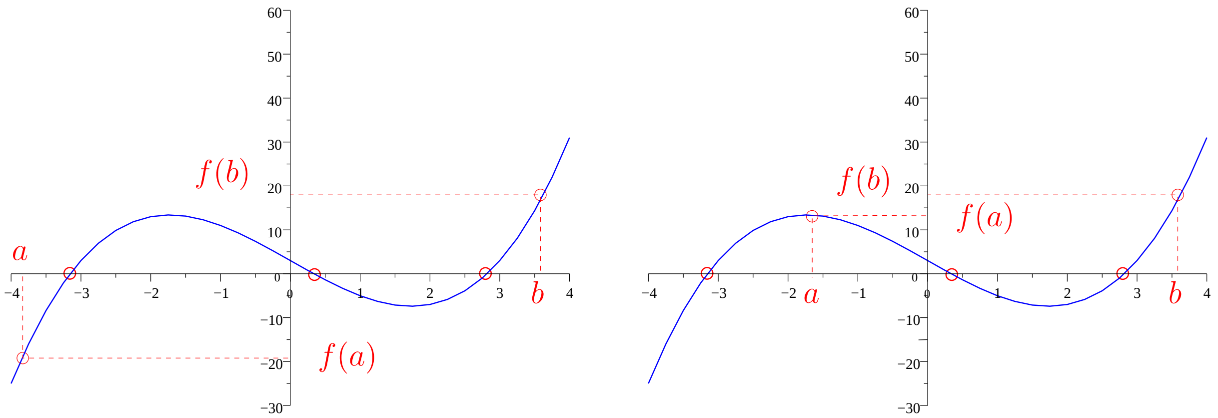
Para encontrar o intervalo fechado apropriado, deve-se atentar para o seguinte teorema:

Teorema 1 *Se uma função contínua $f(x)$ assume valores de sinais opostos nos pontos extremos do intervalo $[a, b]$, isto é $f(a) \cdot f(b) < 0$, então o intervalo conterá, pelo menos, uma raiz de $f(x)$.*

Este teorema diz que, repeitando o critério de $f(a) \cdot f(b) < 0$, um intervalo possui, pelo menos, uma raiz. Ele nada diz sobre duas ou mais raízes. A figura 1-(a) mostra um exemplo de um intervalo com três raízes.

Caso os valores da função $f(x)$ nos extremos do intervalo $[a, b]$ tenham os mesmos sinais, ou seja $f(a) \cdot f(b) > 0$, então nada pode ser dito a respeito da existência de raízes. Assim, neste caso, pode haver, ou não, raízes no intervalo fechado, como mostra a figura 1-(b).

Há, basicamente, duas maneiras de determinar o intervalo:



(a) (b)

Figura 1: Três raízes dentro do intervalo $[a, b]$ cujo critério do Teorema 1 é atendido (a). Duas raízes no intervalo $[a, b]$ com o mesmo critério não atendido.

1. Esboçar o gráfico da função $f(x)$;

   (a) Utilização de *softwares* matemáticos como o *Scilab*, por exemplo;

   (b) Análise da função $f(x)$ (pontos de máximo, mínimo, domínio, etc.);

   (c) Substituição da função $f(x)$ pela subtração de duas outras mais simples, ou seja, $f(x) = g(x) - h(x)$.

Exemplo 1 *Tem-se a função* $f(x) = e^x + 2x$. *Fazendo* $g(x) = e^x$, $h(x) = -2x$ *e* $f(x) = 0$, *obtém-se que* $g(x) = h(x)$. *Assim, basta traçar o gráfico destas funções e observar qual o ponto de encontro entre elas. O resultado é visto na figura 2.*

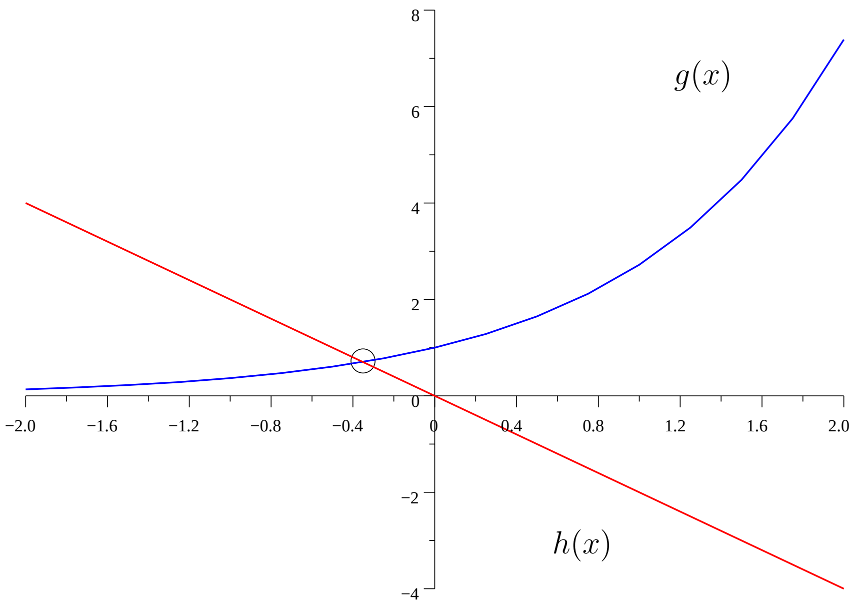


Figura 2: Gráficos das funções $g(x) = \mathrm{e}^x$ (azul) e $h(x) = -2x$ (vermelho).

2. Construção de uma tabela para análise da variação do sinal da função.

Exemplo 2 *Seja a função* $f(x) = x^3 - 9x + 3$*. Atribuindo valores a* x*, pode-se obter uma tabela onde é necessário apenas verificar a variação de sinal entre dois pontos consecutivos. Assim:*

x	$f(x)$
-100	*negativo*
-10	*negativo*
-5	*negativo*
-3	*positivo*
-1	*positivo*
0	*positivo*
1	*negativo*
2	*negativo*
3	*positivo*
5	*positivo*

Nota-se que para os intervalos de $[-5,\ -3]$*,* $[0,\ 1]$ *e* $[2,\ 3]$ *há variação do sinal da função* $f(x)$*, o que indica a presença de uma única raiz em cada um deles.*

1.2 Refinamento da Raiz

Dado o intervalo de existência de uma raiz, passa-se a busca do seu valor, ou o seu refinamento. Para realizar isto, há vários métodos numéricos. Alguns deles serão apresentados nas sub-seções seguintes.

1.2.1 Método da Bisseção

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,\ b]$, tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dividindo-se o intervalo ao meio, obtém-se x_0 e dois subintervalos $[a,\ x_0]$ e $[x_0,\ b]$.

Caso $f(x_0) = 0$ então x_0 é raiz de $f(x)$. Senão deve-se analisar a variação de sinal nos extremos dos subintervalos. Se $f(a) \cdot f(x_0) < 0$ então a raiz está no intervalo $[a,\ x_0]$. Caso contrário, a raiz estará em $[x_0,\ b]$.

Para melhor explicação do método, considere que a raiz está neste subintervalo $[x_0,\ b]$. Ao dividi-lo ao meio, acha-se x_1 e mais dois subintervalos: $[x_0,\ x_1]$ e $[x_1,\ b]$. Então passa-se a analisar os valores da função nos extremos dos intervalos, tornando a repetir todo o processo. A figura 3 mostra graficamente o procedimento de cálculo da raiz de uma função $f(x)$ qualquer por este método.

O critério de parada do método pode ser a análise do valor da função, dos erros absoluto, relativo, ou até mesmo dos limites do intervalo em comparação com uma tolerância pré-especificada δ:

1. Análise do valor da função: $|f(x_i)| < \delta$;
2. Erro absoluto: $|x_i - x_{i-1}| < \delta$;
3. Erro relativo: $\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| < \delta$;
4. Limites do intervalo: $\frac{b-a}{2} < \delta$.

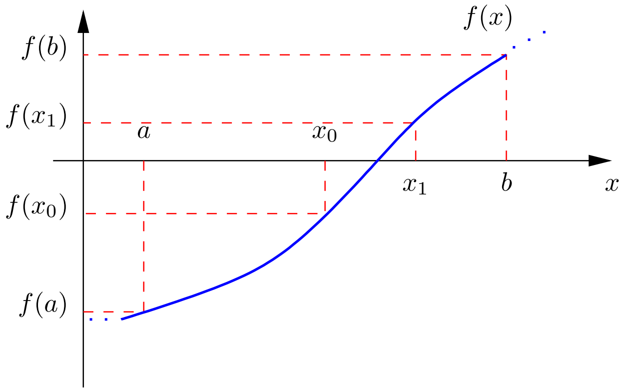


Figura 3: Busca da raiz de $f(x)$ pelo Método da Bisseção

Exemplo 3 *Determinar a raiz da função* $f(x) = x^2 + \ln(x)$*, dados* $\delta = 0,01$ *e* $[0,5;\ 1]$ *e adotando o item 4* ($\frac{b-a}{2}$) *como critério de parada.*

Para saber se neste intervalo há a raiz especificada, basta aplicar o teorema 1. Assim:

$$\begin{aligned} f(0,5) &= 0,5^2 + \ln(0,5) = -0,44315 \\ f(1) &= 1^2 + \ln(1) = 1 \end{aligned}$$

o que corresponde a $f(0,5) \cdot f(1) < 0$*. Portanto, há pelo menos uma raiz de* $f(x)$ *no intervalo especificado.*

O ponto médio deste intervalo é:

$$x_0 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$$

Aplicando o critério de parada:

$$\frac{1-0,5}{2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,25 < 0,01 \quad \textit{(F)}$$

Assim, calcula-se o valor da função para este ponto médio x_0*.*

$$f(0,75) = 0,75^2 + \ln(0,75) = 0,275$$

Testando os extremos dos subintervalos criados por este ponto médio tem-se:

$$f(0,5) \cdot f(0,75) < 0$$

o que garante que a raiz está em $[0,5;\ 0,75]$*. Assim, o ponto médio deste intervalo é:*

$$x_1 = \frac{0,5+0,75}{2} = 0,625$$

Verificando o critério de parada:

$$\frac{0,75-0,5}{2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,125 < 0,01 \quad \textit{(F)}$$

Verificando os subintervalos para determinar a posição da raiz:

$$\begin{aligned} f(0,5) \cdot f(0,625) &> 0 \quad \textit{(Não!)} \\ f(0,625) \cdot f(0,75) &< 0 \quad \textit{(Sim!)} \end{aligned}$$

Assim, o novo intervalo da raiz é $[0,625;\ 0,75]$.

Repetindo todo o procedimento, o ponto médio deste intervalo é:

$$x_2 = \frac{0,625 + 0,75}{2} = 0,6875$$

O critério de parada fica:

$$\frac{0,75 - 0,625}{2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,0625 < 0,01 \quad \textit{(F)}$$

O valor da função quando $x = 0,6875$ *é igual a:*

$$f(0,6875) = 0,6875^2 + \ln(0,6875) = 0,09796$$

e, testando os subintervalos, tem-se:

$$f(0,625) \cdot f(0,6875) < 0$$

o que implica na presença da raiz no subintervalo $[0,625;\ 0,6875]$.

O ponto médio deste novo intervalo é:

$$x_3 = \frac{0,625 + 0,6875}{2} = 0,65625$$

Critério de parada:

$$\frac{0,6875 - 0,625}{2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,0286 < 0,01 \quad \textit{(F)}$$

Valores das funções nos extremos dos subintervalos:

$$f(0,625) \cdot f(0,65625) < 0$$

o que resulta no intervalo $[0,625;\ 0,65625]$ *para a raiz de* $f(x)$.

O novo ponto médio do intervalo recém encontrado:

$$x_4 = \frac{0,625 + 0,65625}{2} = 0,641$$

O critério de parada:

$$\frac{0,65625 - 0,625}{2} < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,0156 < 0,01 \quad \textit{(F)}$$

O valor da função nesta coordenada x_4 *é:*

$$f(0,641) = 0,641^2 + \ln(0,641) = -0,035$$

Testando os subintervalos:

$$\begin{aligned} f(0,625) \cdot f(0,641) &\;>\; 0 \quad \textit{(Não!)} \\ f(0,641) \cdot f(0,65625) &\;<\; \quad \textit{(Sim!)} \end{aligned}$$

com novo intervalo igual a $[0,641;\ 0,65625]$ *e ponto médio igual a:*

$$x_5 = \frac{0,641 + 0,65625}{2} = 0,64844$$

Verificando o critério de parada tem-se:

$$\frac{0,65625 - 0,641}{2} < 0,01 \quad 0,00781 < 0,01 \quad \textit{(V)}$$

Portanto, uma vez que o critério de parada foi aceito, encerra-se a busca pela raiz da função fornecida e o resultado é $x_5 = 0,64844$.

Pode-se utilizar o Scilab para desenhar o gráfico desta função, que está na figura 4. A seqüência de comandos para obter este gráfico é:

```
-->x = [0.5:0.025:1];
-->deff("[y] = f(x)","y = x^2 + log(x)");
-->fplot2d(x,f,2,"085")
```

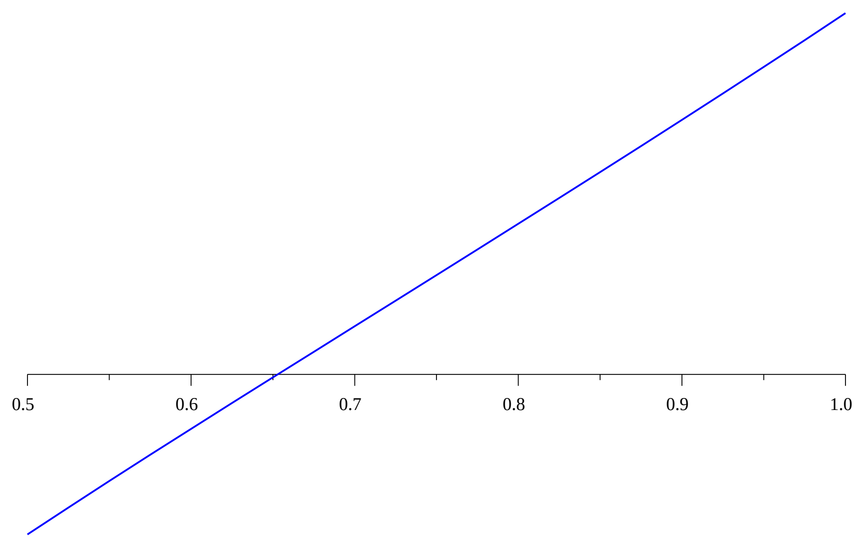


Figura 4: Gráfico da função $f(x) = x^2 + \ln(x)$.

Vê-se que o Método da Bisseção tem uma convergência lenta. Dependendo da precisão escolhida, o esforço computacional irá se tornar grande. De qualquer maneira, o algoritmo deste método é simples e necessita, como dados de entrada, do aintervalo $[a, b]$, de um limite de tolerância δ e de um número máximo de iterações N para evitar que o programa fique preso em um laço infinito, caso não haja convergência. Como saída do programa tem-se ou a raiz desejada ou uma mensagem de erro.

Algoritmo

```
i = 0;
x_ant = 0;
Enquanto i <= N fazer
   x = (a + b)/2;
      Se f(x) = 0 ou (b - a)/2 < delta então
         Apresentar x como raiz;
         Finalizar o programa.
      Fim
   x_ant = x;
   Se f(a)*f(x) < 0 então
      b = x;
   Senão
      a = x;
   Fim
   i = i + 1;
Fim
Exibir a mensagem:  "Método falhou em N iterações!"
```

1.3 Método de Newton-Raphson

Também é conhecido como Método de Newton. Ele é um dos métodos numéricos mais conhecidos e poderosos para cálculo de raízes de equações não-lineares.

Seja uma função $f(x)$ contínua e diferenciável no intervalo $[a,\ b]$, ou seja, $f(x)$ possui derivadas únicas em todos os pontos do intervalo especificado. Supondo uma aproximação x_0 para a raiz de $f(x)$, no ponto $(x_0,\ f(x_0))$ passa apenas uma única reta tangente, que é a derivada de $f(x)$ em x_0.

Esta reta tangente corta o eixo x na coordenada x_1, definindo por sua vez, o ponto $(x_1,\ f(x_1))$. Por este novo ponto também passa uma única reta tangente que corta o eixo x em x_2. Esta nova coordenada define outro ponto $(x_2,\ f(x_2))$ que repete todo o processo.

Nota-se que os valores $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots$, são aproximações, cada vez melhoradas, em relação ao valor anterior, da raiz de $f(x)$. O resultado final irá depender do critério de parada adotado. A figura 5 exemplifica graficamente este procedimento.

A estimativa inicial deve ser escolhida de forma que seja igual ao extremo b, ou seja, $x_0 = b$. Isto irá garantir a convergência do método.

1.3.1 Obtenção da Fórmula

Da figura 5 sabe-se que:

$$\tan(\theta_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

onde $i = 0, 1, 2, \ldots$. Isolando x_{i+1} tem-se:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\tan(\theta_i)}$$

Como $\tan(\theta_i) = f'(x_i)$, então:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

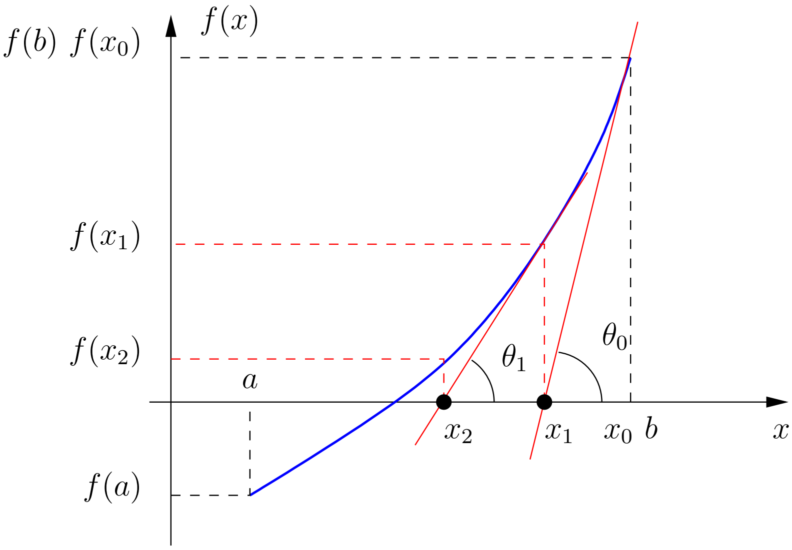


Figura 5: Exemplo gráfico do Método de Newton-Raphson.

O critério de parada consiste na análise do erro relativo, ou seja, se o erro relativo for menor que uma tolerância previamente especificada então o processo de cálculo é encerrado:

$$\left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| < \delta$$

Exemplo 4 *Determinar a raiz da função utilizada no exemplo anterior utilizando o Método de Newton. Assim,* $f(x) = x^2 + \ln(x)$, $\delta = 0,01$ *e* $[0,5;\ 1]$.

A primeira derivada da função é $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

Para $x_0 = 1$ *(estimativa inicial):*

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 + \ln(1) = 1 \\ f'(1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1}{3} = 0,667 \end{aligned}$$

O critério de parada é:

$$\left|\frac{0,667 - 1}{0,667}\right| < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,5 < 0,01 \quad (F)$$

Para $x_1 = 0,667$*:*

$$\begin{aligned} f(0,667) &= 0,667^2 + \ln(0,667) = 0,04 \\ f'(0,667) &= 2 \cdot 0,667 + \frac{1}{0,667} = 2,833 \\ x_2 &= 0,667 - \frac{0,04}{2,833} = 0,653 \end{aligned}$$

Verificando o critério de parada:

$$\left|\frac{0,653 - 0,667}{0,653}\right| < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0,0214 < 0,01 \quad (F)$$

Para $x_2 = 0,653$:

$$\begin{aligned} f(0,653) &= 0,653^2 + \ln(0,653) = 0,00023 \\ f'(0,653) &= 2 \cdot 0,653 + \frac{1}{0,653} = 2,84 \\ x_3 &= 0,653 - \frac{0,00023}{2,84} = 0,653 \end{aligned}$$

Verificando se o critério de parada atende ao que foi especificado:

$$\left| \frac{0,653 - 0,653}{0,653} \right| < 0,01 \quad \Rightarrow \quad 0 < 0,01 \quad \text{(V)}$$

Dessa forma, a raiz de $f(x)$ é $x_3 = 0,653$.

Algoritmo. Para este algoritmo admite-se como, dados de entrada, o limite δ (que no algoritmo é `delta`), a estimativa inicial x_0, a função $f(x)$ e sua primeira derivada $f'(x)$, que foi chamada de `df(x)`, e, por fim, o número máximo de iterações N.

```
Enquanto i <= N
   x(i+1) = x(i) - f(x(i))/df(x(i));
   Se abs((x(i+1) - x(i))/x(i)) < delta então
      Apresentar x(i+1) como raiz;
      Finalizar o programa.
   Fim
   x(i) = x(i+1);
   i = i + 1;
Fim
Exibir mensagem:  "Método falhou em N iterações"
```

Observação 1 *Embora seja mais rápido que o método da Bisseção, o Método de Newton tem a desvantagem de precisar da primeira derivada de $f(x)$. Há casos que $f'(x)$ não pode ser obtida pois se conhece a forma analítica de $f(x)$ ou então esta função é complexa para obtenção da derivada.*

1.4 Método da Secante

O método da secante é uma modificação do Método de Newton-Raphson e consiste em aproximar a derivada $f'(x)$ por:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

que substituindo na fórmula do método de Newton, e fazendo os devidos arranjos, fica igual a:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

O método da secanta é bastante similar ao de Newton-Raphson com relação à convergência. Entretanto, ele necessita de duas aproximações iniciais: x_0 e x_1. A aproximação

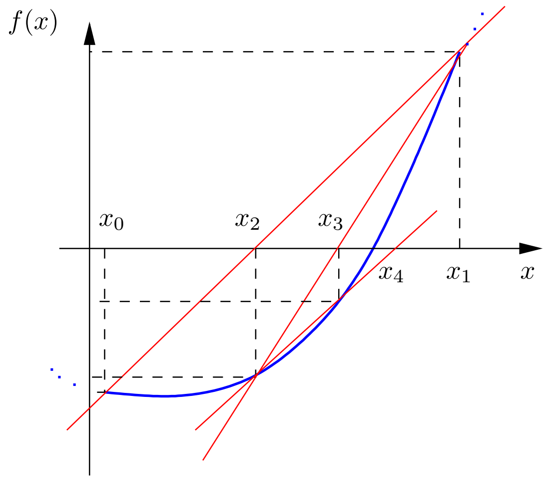


Figura 6: Interpretação geométrica do Método da Secante.

da raiz para a função $f(x)$ será a abcissa do ponto de interseção entre o eixo x e a reta que liga estas duas aproximações iniciais. Caso esta nova aproximação não atenda a uma tolerância pré-estabelecida, deve-se repetir o cálculo para encontrar uma outra nova aproximação. A figura 6 mostra graficamente a evolução do algoritmo.

Exemplo 5 *Calcular uma raiz da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5$, *sabendo que ela se encontra no intervalo* $[2;\ 2,5]$. *A tolerância permitida para a solução é* $\delta = 0,001$.

Para esta função, adota-se como estimativas iniciais os valores do intervalo fornecido. Assim, $x_0 = 2$ *e* $x_1 = 2,5$.

Para $i = 1$ *tem-se que:*

$$x_2 = \frac{x_0 \cdot f(x_1) - x_1 \cdot f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2.12121$$

com o seguinte erro absoluto:

$$|x_2 - x_1| = 0.37879 > 0.001$$

Como a precisão não foi satisfeita continua-se o procedimento. Para $i = 2$ *tem-se:*

$$x_3 = \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 \cdot f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 2.14529$$

com o seguinte erro absoluto:

$$|x_3 - x_2| = 0.02408 > 0.001$$

Para $i = 3$ *tem-se:*

$$x_4 = \frac{x_2 \cdot f(x_3) - x_3 \cdot f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 2.15102$$

com o seguinte erro absoluto:

$$|x_4 - x_3| = 0.00573 > 0.001$$

Para $i = 4$, o resultado é:

$$x_5 = \frac{x_3 \cdot f(x_4) - x_4 \cdot f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} = 2.15104$$

com o seguinte erro absoluto:

$$|x_5 - x_4| = 0.00002 < 0.001$$

Portanto, o valor $x_5 = 2.15104$ é raiz de $f(x)$.

Algoritmo. O algoritmo do Método da Secante é bastante similar ao de Newton-Raphson. Deve-se utilizar como entradas os valores aproximados para x_1 e x_0, a tolerância δ, a função $f(x)$ e o número máximo de iterações, N.

```
Para i variando de 1 até N
   x = (x0*f(x1) - x1*f(x0))/(f(f1) - f(x0))
   Se abs((x - x1)/x) < delta
      Apresentar x como raiz;
      Finalizar o programa;
   Fim
   x0 = x1;
   x1 = x;
Fim
Apresentar a mensagem:
   ``Método não convergiu em N iterações!''
```

2 Exercícios

1. Localize graficamente as raízes das equações a seguir:

   (a) $4\cos x - e^{2x} = 0$;

   (b) $\frac{x}{2} - \tan x = 0$;

   (c) $1 - x \ln x = 0$;

   (d) $2^x - 3x = 0$; e

   (e) $x^3 + x - 1000 = 0$.

2. Usando o Método da Bisseção, determine as raízes reais das equações no caso de o número de raízes ser finito e, no caso de a equação possuir infinitas raízes reais, determinar a menor raiz positiva. Fornecer os resultados com pelo menos duas casas decimais exatas.

   (a) $x^3 - x^2 + 1 = 0$;

   (b) $2e^{-x} - sen x = 0$;

   (c) $\frac{e^x + x}{4} - \cos x = 0$; e

   (d) $x \ln x - 0,8 = 0$.

3. A equação
$$\frac{1}{x^2+x+1} - x^2 + 0,5 = 0$$
tem uma raiz real pertencente ao intervalo (0, 1). Determine uma cota para o erro absoluto, se no cálculo dessa raiz, por meio do Método da Bisseção, são dados 30 passos. Com base nessa cota, pode-se afirmar que a raiz é calculada com quantas casas decimais corretas?

4. Use o Método de Newton-Raphson para obter a menor raiz positiva das equações a seguir com precisão $\delta = 10^{-4}$.
   (a) $\frac{x}{2} - \tan x = 0$;
   (b) $2\cos x = \frac{e^x}{2}$;
   (c) $x^5 - 6 = 0$.

5. Em cada um dos casos abaixo, verifique quantas raízes reais tem a equação e determine a menor raiz positiva corretamente até a quarta casa decimal por meio do Método de Newton-Raphson.
   (a) $x^5 - x - 1 = 0$;
   (b) $x + \tan x = 0$;
   (c) $(x+1)^{1/2} - x^{-2} = 0$;
   (d) $2^x - 2x^2 + 1 = 0$;
   (e) $\ln x - 3e^{x+2} = 0$;
   (f) $\ln x + (x+1)^3 = 0$;
   (g) $x^2 - \cos x = 0$; e
   (h) $\mathbf{e}^{-x^2} - x^2 - 2x + 2 = 0$.

6. Determinar por meio do Método de Newton-Raphson, corretamente, até a quarta casa decimal, as raízes da equação $x^4 - x - 5 = 0$.

7. O valor de π pode ser obtido através da resolução das seguintes equações:
   (a) $\sin x = 0$; e
   (b) $\cos x + 1 = 0$.

   Aplique o Método de Newton-Raphson com $x_0 = 3$ e precisão 10^{-7} em cada caso e compare os resultados obtidos.

8. Determine por meio do Método da Secante, corretamente, até a quarta casa decimal, a raiz positiva da equação
$$\frac{3}{1+x^2} - \frac{1}{2x^3} = 0$$

9. O polinômio
$$p(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$
tem seus cinco zeros reais, todos no intervalo $(-1, 1)$.

(a) Verificar que:

$$x_1 \in (-1,\ -0.75)$$
$$x_2 \in (-0.75,\ -0.25)$$
$$x_3 \in (-0.25,\ 0.3)$$
$$x_4 \in (0.3,\ 0.8)$$
$$x_5 \in (0.8,\ 1)$$

(b) Encontre, pelo respectivo método, usando $\delta = 10^{-5}$

x_1 por Newton-Raphson ($x_0 = -0.8$);

x_2 por Bisseção ($[a,\ b] = [-0.75,\ -0.25]$);

x_5 pelo método da Secante ($x_0 = 0.8$ e $x_1 = 1$).

10. **Exercício Aplicado**: o preço à vista (PV) de uma mercadoria é R$ 312.000,00 mas pode ser financiado com uma entrada (E) de R$ 91.051,90 e 12 (P) prestações mensais (PM) de R$ 26.000,00. Calcule os juros (j) sabendo que

$$\frac{1 - (1 + \mathrm{j})^{-\mathrm{P}}}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{PV} - \mathrm{E}}{\mathrm{PM}}$$

11. **Exercício Aplicado**: quais serão os juros se o plano de pagamento for uma entrada de R$ 112.000,00 e 18 prestações mensais de R$ 20.000,00?

Referências

[1] *Métodos Computacionais em Engenharia – Notas de Aula*; Paulo S. M. Pires; 2004; `http://www.dca.ufrn.br/~pmotta/`.

[2] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. Campos, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.

[3] *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*; Márcia A. G. Ruggiero, Vera L. R. Lopes; Makron Books; Segunda edição; 1996.

[4] *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*; Décio Sperandio, João T. Mendes, Luiz H. Monken e Silva; Prentice-Hall; 2003.

[5] *Análise Numérica*; Richard L. Burden, J. Douglas Faires; Pioneira Thomson Learning; 2003.