Introdução – Análise de Erros

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

DCA – CT – UFRN
http://www.dca.ufrn.br/∼diogo/

1 Introdução

Muitos problemas de engenharia consistem em obter uma solução para um determinado modelo matemático que representa um certo sistema físico. Assim, dado um problema físico (ver figura 1), normalmente deseja-se analisá-lo ou resolvê-lo. O primeiro passo, então, é realizar a *modelagem* para encontrar o modelo matemático do sistema, ou seja, o conjunto de equações que descrevem o comportamento do sistema.

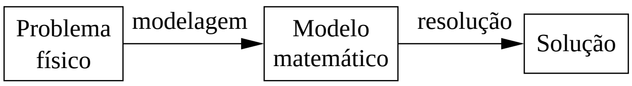


Figura 1: Etapas para encontrar uma solução

A etapa sequinte seria aplicar algum método de *resolução* para determinar a solução do problema. Normalmente usa-se o método de resolução analítica, que é aquele que se vale dos conhecimentos científicos de física e matemática. A solução analítica de um problema será tão boa quanto for o modelo do sistema. O problema é que a busca desta solução pode ser bastante complexa, ou até mesmo não haver solução. Para evitar tais problemas, pode-se utilizar outra alternativa que são os *métodos de resolução numérica*, onde se utiliza algum equipamento eletrônico (computador ou calculadora científica) para auxiliar nos cálculos (a solução é em termos numéricos e não em termos literais, como normalmente ocorre na resolução analítica). Entretanto, a utilização de métodos numéricos tem um preço: a existência de erros que, dependendo da aplicação, pode inutilizar a solução. Estes erros serão abordados nas seções seguintes.

2 Sistema de Numeração

Uma breve apresentação dos sistemas de numeração será exposta nas subseções seguintes. Destaca-se que, embora haja uma grande quantidade de sistemas de numeração, o sistema binário será mais abordado pois ele é de fundamental importância para a compreensão dos erros.

A título de curiosidade, os sitemas de numeração mais conhecidos são o decimal (que é usado dia a dia), o sistema binário, o octal (base 8) e o hexadecimal (base 16). Normalmente as calculadoras científicas vêm com funções para transformação de números de uma base para outra.

2.1 Sistema Decimal

O sistema de numeração decimal é aquele utilizado diariamente pelas pessoas. Acredita-se que a sua disseminação tenha ocorrido devido a facilidade de associar os símbolos numéricos (dígitos) aos dedos no início da história do cálculo.

As principais características do sistema decimal são:

1. Compõe-se de 10 algarismos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);
2. É um sistema posicional porque o valor do dígito depende da posição em que se encontra no número;
3. Não é indicado para ser usado por sistemas computacionais.

Exemplo.

$$\begin{aligned} 275,214 = {} & 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + \\ & + 2 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

2.2 Sistema Binário

O sistema binário é aquele que possui apenas dois dígitos: 0 e 1. Ele é bastante simples e caracteriza-se por também ser posicional, ou seja, o valor associado ao 0 ou ao 1 depende da posição em que eles estão no número. Um exemplo de número binário é 1001110110111. Normalmente os números binários são extensos, embora eles possam representar qualquer valor de qualquer sistema de numeração. Por possuir apenas dois dígitos, o sistema binário é chamado de sistema de base 2.

O funcionamento de computadores, ou qualquer sistema eletrônico se dá através da presença de tensão elétrica nos seus circuitos. O fato dos circuitos digitais operarem dessa maneira permite associar as informações desejadas à presença, ou não, de tensão. Desta forma, é bastante trivial para os computadores trabalhar com o sistema binário, sendo o 0 representado quando não há tensão elétrica em seus circuitos, e o 1 quando há tensão elétrica. Esta facilidade não ocorreria com o sistema decimal porque é muito difícil implementar dez níveis de tensão diferentes (cada nível correspondendo a um dígito dd 0 a 9).

Cada um dos dígitos binários é denominado *bit*. Um bit é a menor unidade de informação que pode ser transmitida e processada pelo computador. Um conjunto de bits tem o nome de *byte*.

2.3 Conversão Binário – Decimal

Para converter um número na representação binária para a decimal basta ter o conhecimento da posição (ou do peso) do dígito no número e da base, que neste caso é 2. A figura 2 mostra como são estes pesos no número binário com ponto flutuante.

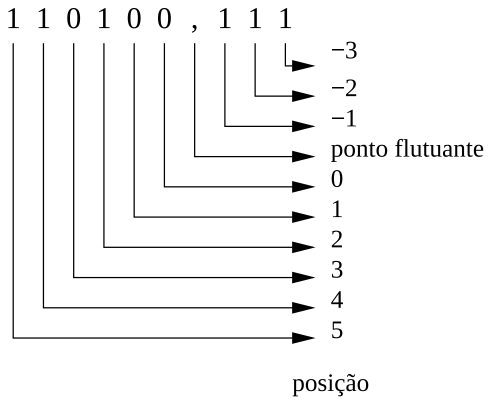


Figura 2: Posições (ou pesos) dos dígitos em um número binário

Assim, conhecendo estes pesos, basta multiplicar cada dígito binário pela base elevada ao respectivo peso (de maneira similar ao exemplo do Sistema Decimal). O exemplo a seguir mostra como fazê-lo.

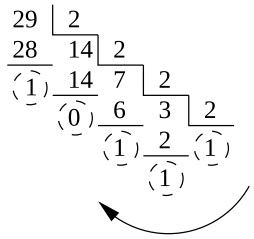
Exemplo. Dado o número binário $110100,111_2$, encontrar o seu equivalente em decimal.

$$110100,111_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + \\ + \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$$

Desse modo, efetuando as operações indicadas, ver-se-á que $110100,111_2 = 52,875_{10}$. Os índices 2 e 10 servem para indicar que os números estão em binário e decimal, respectivamente.

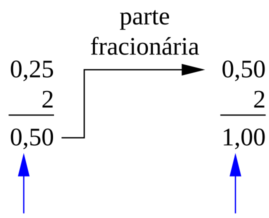
2.4 Conversão Decimal – Binário

Para converter um número decimal para binário, pode-se utilizar duas técnicas distintas. A primeira chama-se *Método das Divisões Sucessivas por 2* e é aplicada quando deseja-se converter um número decimal inteiro



$$29_{10} = 11101_2$$

Figura 3: Método das divisões sucessivas por 2.



$$0,25_{10} = 0,01_2$$

Figura 4: Método das multiplicações sucessivas por 2.

para seu equivalente binário. O exemplo da figura 3 mostra o procedimento deste método.

O Método das Divisões Sucessivas se encerra quando é alcançado um quociente igual a 1.

Se o número for com ponto flutuante, deve-se usar o *Método das Multiplicações Sucessivas por 2*, que consiste em multiplicar o número por 2, utilizar a parte inteira do resultado para compor o número e multiplicar, novamente, a parte fracionária por 2. Este procedimento deve ser repetido até que a parte fracionária seja igual a zero. O exemplo da figura 4 mostra este procedimento.

Caso o número decimal seja composto como, por exemplo $33,27_{10}$, deve-se separar as partes inteira e fracionária e proceder normalmente com a conversão, como apresentado nos exemplos das figuras 3 e 4. Em seguida, basta adicionar as duas partes:

$$\begin{aligned} 33,27_{10} &= 33_{10} + 0,27_{10} \\ &= 100001_2 + 0,0100010100011110101110\ldots_2 \\ &= 100001,0100010100011110101110\ldots_2 \end{aligned}$$

3 Erros de Arredondamento

Considere um número x representado na base β. Qualquer que seja o seu sistema de numeração, x pode ser representado da seguinte forma:

$$x = \pm \left[\frac{d_1}{\beta^1} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_t}{\beta^t} \right] \cdot \beta^{\mathrm{EXP}} \tag{1}$$

onde d_i, com $i = 1, 2, \ldots, t$, são números inteiros contidos no intervalo $0 \leq d_i \leq \beta - 1$; EXP é o expoente de

β e está contida no intervalo I $\leq$ EXP $\leq$ S, sendo I o limite inferior e S o limite superior. O valor dado por:

$$\left[\frac{d_1}{\beta^1} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_t}{\beta^t}\right]$$

é chamado de *mantissa* e é a parte do número x que representa os seus dígitos significativos. O seu valor deve ficar entre 0 e 1. Por fim, o índice t indica a quantidade de dígitos significativos do sistema de representação.

Exemplo. Representar o valor decimal $31,415_{10}$ na notação global representada pela equação 1.

$$\begin{aligned} 31,415_{10} &= 0,31415 \cdot 10^2 \\ &= \left[\frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{5}{10^5}\right] \cdot 10^2 \end{aligned}$$

Neste caso identifica-se $\beta = 10$, t $= 5$ e EXP $= 2$.

Exemplo. Representar o número binário 11101_2 na mesma notação.

$$\begin{aligned} 11101_2 &= 0,11101 \cdot 2^5 \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right] \cdot 2^5 \end{aligned}$$

Aqui pode-se afirmar que: $\beta = 2$, t $= 5$, EXP $= 5$.

Exemplo. Representar o mesmo número anterior, dados $\beta = 2$, t $= 10$, I $=$ -15 e S $= 15$.

$$\begin{aligned} 11101_2 &= 0,11101 \cdot 2^5 \\ &= 0,11101 \cdot 2^{101_2} \quad (5_{10} = 101_2) \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{0}{2^8} + \frac{0}{2^9} + \frac{0}{2^10}\right] \cdot 2^{101_2} \end{aligned}$$

Este tipo de exemplo de representação com número de dígitos significativos estipulado e com limites máximo e mínimo para o expoente da base ilustra como os números são representados em sistemas digitais. No exemplo anterior tem-se 10 dígitos especificados para a mantissa, e 4 dígitos para o expoente. O expoente possui quatro dígitos devido aos limites superir e inferior de EXP (lembrar-se de que $15_{10} = 1111_2$, perfazendo quatro dígitos). Assim, tem-se a seguinte representação de 14 bits (ou dígitos binários):

1110100000	0101

No entanto, é necessário representar também os sinais da mantissa e do expoente. Convencionou-se que o bit 0 corresponderá a valores positivos e o bit 1 será associado para valores negativos. Assim, o número binário 11101 em uma máquina de 16 bites será:

0	1110100000	0	0101

O maior número que pode ser representado por esta máquina de 16 bits é:

0	1111111111	0	1111

que corresponde ao valor decimal 32736. Por simetria, o menor valor decimal então é -32736, que é:

1	1111111111	0	1111

O valor decimal 0 é simplesmente:

0	0000000000	0	0000

Já o primeiro número positivo é:

0	1000000000	1	1111

que é o valor decimal 0,000015259. O segundo número positivo representado por esta máquina é:

0	1000000001	1	1111

que representa o valor decimal 0,000015289.

Analisando esta seqüência de três números, percebe-se que uma máquina eletrônica (seja ela calculadora ou computador) não consegue representar todos os números decimais em seus registradores e processadores. Isto faz com que números que não sejam representados corretamente. Um exemplo: o número decimal 0,000014335 não tem representação adequada em uma máquina de 16 bits. Devido a isto, este número é "arredondado" para o valor 0,000015259, que é o primeiro número positivo representável.

Esta característica de máquinas eletrônicas não representarem fielmente os números decimais é conhecida como Erro de Arredondamento. Este erro pode ser prejudicial em aplicações que necessitem de uma precisão numérica rigorosa.

Observação. Um parâmetro bastante utilizado para avaliar a precisão de um sistema de representação é o número de casas decimais exatas da mantissa. Este valor é dado pelo valor decimal do último bit da mantissa. Assim:

$$\text{PRECISÃO} \leq \frac{1}{\beta^t}$$

Na máquina de 16 bits ($\beta = 2$ e t $= 10$) a precisão da mantissa é da ordem de $\frac{1}{2^{10}} \approx 10^{-3}$, o que dá 3 dígitos significativos corretos.

Assim, ressalta-se a importânica de conhecer o número de dígitos significativos corretos do sistema de representação da máquina que está sendo utilizada. Este conhecimento tem a finalidade de dar a noção da precisão do resultado obtido. O programa a seguir foi escrito em Scilab e serve para calcular a precisão de uma máquina:

```
clear;
eps = 0.5;
eps1 = eps + 1.0;
while eps1 > 1 then
  eps = eps/2.0;
  eps1 = eps + 1.0;
end
printf("A maquina acha que %.30f eh zero",eps);
```

Utilizando um computador com processador Pentium III da Intel, o resultado obtido foi:

```
;exec("/home/diogo/graduacao/DCA0304/teste.sci");
A maquina acha que 0.00000000000000011102 eh zero
```

Nesta situação, a quantidade de dígitos significativos corretos é igual a 15.

4 Erro de Truncamento

São erros provenientes da utilização de processos numéricos que deveriam ser infinitos, ou muito grandes, para a determinação de um valor e que são truncados. Estes processos infinitos são, normalmente, usados na avaliação de funções matemáticas como exponenciação, logaritmos, funções trigonométricas, entre outras.

5 Propagação de Erros

Ocorrem quando há, em uma máquina, cálculos que envolvem várias operações. Nestes casos, aconselha-se a verificar a quantidade de dígitos significativos e a ordem de prioridade para a realização dos cálculos.

Exemplo. Supondo uma máquina com 4 dígitos significativos e os seguintes números: $x_1 = 0,3491 \cdot 10^4$ e $x_2 = 0,2345 \cdot 10^0$. Deseja-se efetuar as operações as seguintes operações: $(x_2 + x_1) - x_1$ e $x_2 + (x_1 - x_1)$.

$$\begin{aligned}(x_2 + x_1) - x_1 &= (0,2345 \cdot 10^0 + 0,3491 \cdot 10^4) + \\ &\quad - 0,3491 \cdot 10^4 \\ &= 0,3491 \cdot 10^4 - 0,3491 \cdot 10^4 = 0\end{aligned}$$

A segunda operação seria:

$$\begin{aligned}x_2 + (x_1 - x_1) &= 0,2345 \cdot 10^0 + (0,3491 \cdot 10^4 + \\ &\quad - 0,3491 \cdot 10^4) \\ &= 0,2345 \cdot 10^0\end{aligned}$$

Nota-se que, devido à prioridade de execução das operações aritméticas e por causa da quantidade limitada de dígitos significativos da máquina, o resultado mostra-se ambíguo para duas equações matematicamente iguais.

6 Exercícios

1. Converter para decimal:
   (a) 10101_2
   (b) $0,1010101_2$
   (c) 111001_2
   (d) 1101101_2
   (e) $0,10101_2$
   (f) $101,1101_2$
2. Converter para binário:
   (a) 23_{10}
   (b) 77_{10}
   (c) $361,125_{10}$
   (d) 14_{10}
   (e) $136,65625_{10}$
   (f) $5,11_{10}$
3. Uma máquina de 8 bits possui $\beta = 2$ e $t = 3$. Determinar:
   (a) O maior número que pode ser representado na máquina.
   (b) A sua precisão.
   (c) Representar o número 19,58 nesta máquina.
4. Considerando a seguinte equação:

$$P = \int_0^{\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = 0,2553074606$$

   Obtenha o número de dígitos significativos exatos quando $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ é substituído por:

$$P_6(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

   Que tipo de erro está presente nesta situação?

Referências

[1] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. C. Filho, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.