Interpolação

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
http://www.dca.ufrn.br/∼diogo

1 Introdução

O problema de interpolação surge quando deseja-se aproximar uma função $f(x)$ por outra $g(x)$. A função $f(x)$ é de difícil manuseio ou avaliação. Normalmente desconhece-se a sua forma analítica mas o que se sabe sobre ela é um pequeno conjunto de entradas e saídas $(x_i, f(x_i))$, os quais são chamados de pontos bases. Já a função $g(x)$ possui um tratamento mais simples. Ela é chamada de função interpolante. Ela consiste na combinação linear de funções simples, as quais são:

1. Monômios (x^k, onde $k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Exemplo:

$$f(x) \approx g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

2. Funções trigonométricas ($\sin kx$ e $\cos kx$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} f(x) \approx g(x) &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nk \end{aligned}$$

3. Funções exponenciais ($a_k \mathrm{e}^{b_k x}$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n$):

$$f(x) \approx g(x) = a_0 \mathrm{e}^{b_0 x} + a_1 \mathrm{e}^{b_1 x} + \ldots + a_n \mathrm{e}^{b_n x}$$

Para determinar $g(x)$ completamente, deve-se determinar os coeficientes presentes nessas expressões. Para este curso, as funções interpolantes que serão utilizadas são os polinômios (que utilizam os monômios).

Observação. Em uma interpolação, deseja-se descobrir uma função $g(x)$, tal que seja possível determinar o valor de $g(\hat{x})$, sendo que $\hat{x}$ pertença ao intervalo fechado $[x_0, x_n]$ mas não esteja presente na tabela.

Exemplo. Número de habitantes de Belo Horizonte:

Ano	**Habitantes**
1950	352.724
1960	638.908
1970	1.235.030
1980	1.814.990

Caso deseje-se saber o número de habitantes no ano de 1975, isso seria um problema de interpolação, uma vez que $1975 \in [1950, 1980]$. Caso deseje-se conhecer qual a população de Belo Horizonte em 1983, o problema passaria a ser de extrapolação, que não será objeto de estudo neste curso.

2 Interpolação Polinomial

Dado que $f(x) \approx g(x)$, onde:

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

e estando disponíveis apenas os pontos bases $(x_i, f(x_i))$, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, então pode-se montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n \\ f(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n \\ f(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n \\ &\vdots \\ f(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n \end{aligned}$$

que na forma matricial fica igual a:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

que é um sistema linear de $(n+1)$ equações a $(n+1)$ incógnitas.

A matriz dos coeficientes é chamada de matriz de *Vandermonde* de ordem $(n+1)$ pois possui a seguinte propriedade:

$$\det(A) \neq 0 \;\rightarrow\; x_i \neq x_j, \text{ para todo } i \neq j$$

Para determinar os coeficientes a_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, não se pode utilizar as técnicas de resolução de sistemas lineares devido aos erros de truncamento. Assim, deve-se alguma outra técnica alternativa.

Há um teorema em interpolação polinomial que diz que, dados $(n+1)$ pontos bases distintos, existe uma única interpolante polinomial de ordem n, chamado de polinômio interpolador que satisfaz o sistema.

2.1 Interpolação de Lagrange

Sejam os $(n+1)$ polinômios $p_i(x)$ de grau n a seguir:

$$\begin{array}{rcl}
p_0(x) & = & (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \\
p_1(x) & = & (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \\
p_2(x) & = & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n) \\
 & \vdots & \\
p_n(x) & = & (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})
\end{array}$$

ou, de uma forma mais compacta:

$$p_i(x) = \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} (x-x_j) \tag{1}$$

com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Estes polinômios são chamados de Polinômios de Lagrange e possuem as seguintes propriedades:

1. $p_i(x_i) \neq 0$, para todo i;
2. $p_i(x_j) = 0$, para todo $j \neq i$.

Como se deseja encontrar o polinômio $P_n(x)$ (ou seja, a função interpolante $g(x)$) de grau n que contém os pontos $(x_i, f(x_i))$, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, pode-se escrevê-lo como uma combinação linear de $p_i(x)$:

$$P_n(x) = b_0p_0(x) + b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + \ldots + b_np_n(x)$$

ou, de maneira compacta:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ip_i(x)$$

onde os termos b_i devem ser encontrados para determinar $P_n(x)$.

Seja um valor x_k conhecido. Substituindo-o na equação do polinômio $P_n(x)$, tem-se:

$$P_n(x_k) = b_0p_0(x_k) + b_1p_1(x_k) + b_2p_2(x_k) + \ldots + b_kp_k(x_k) + \ldots + b_np_n(x_k)$$

Das propriedades dos polinômios de Lagrange, esta equação reduz-se a:

$$P_n(x_k) = b_kp_k(x_k) \rightarrow b_k = \frac{P_n(x_k)}{p_k(x_k)}$$

Como $f(x) \approx g(x) = P_n(x)$, então:

$$b_k = \frac{f(x_k)}{p_k(x_k)}$$

ou, de uma forma mais geral:

$$b_i = \frac{f(x_i)}{p_i(x_i)}$$

Assim, a equação característica do Polinômio Interpolador de Lagrange é:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)}$$

ou, utilizando a equação 1, fica-se com:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Exercício. A função $f(x)$ passa pelos pontos registrados na tabela abaixo. Com base nos seus valores, deve-se determinar:

1. O polinômio interpolador de maior ordem;
2. O valor de $P_n(x)$ para $x = 0,320$.

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,000	1,000
1	0,100	0,761
2	0,300	0,067
3	0,400	−0,376

Como tem-se quatro pontos bases, necessitar-se-á de um polinômio de terceiro grau ($n = 3$). Assim:

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} b_i p_i(x)$$

sendo:

$$b_i = \frac{f(x_i)}{p_i(x_i)}$$

Dessa forma, fica-se com:

$$P_3(x) = \frac{f(x_0)}{p_0(x_0)} \cdot p_0(x) + \frac{f(x_1)}{p_1(x_1)} \cdot p_1(x) + \frac{f(x_2)}{p_2(x_2)} \cdot p_2(x) + \frac{f(x_3)}{p_3(x_3)} \cdot p_3(x) \qquad (2)$$

Os termos x_i e $f(x_i)$, com $i = 0, 1, 2, 3$, são extraídos da tabela fornecida. Já os polinômios $p_i(x)$ são calculados como:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 0,8x^2 + 0,19x - 0,012 \\
p_1(x) &= (x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 0,7x^2 + 0,12x \\
p_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) = x^3 - 0,5x^2 + 0,04x \\
p_3(x) &= (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x^3 - 0,4x^2 + 0,03x
\end{aligned}$$

A determinação dos termos $p_i(x_i)$ é trivial. Assim:

$$\begin{aligned}
p_0(0,0) &= (0,0)^3 - 0,8 \cdot (0,0)^2 + 0,19 \cdot 0,0 - 0,012 = -0,012 \\
p_1(0,1) &= (0,1)^3 - 0,7 \cdot (0,1)^2 + 0,12 \cdot 0,1 = 0,006 \\
p_2(0,3) &= (0,3)^3 - 0,5 \cdot (0,3)^2 + 0,04 \cdot 0,3 = -0,006 \\
p_3(0,4) &= (0,4)^3 - 0,4 \cdot (0,4)^2 + 0,03 \cdot 0,4 = 0,012
\end{aligned}$$

Por fim, substituindo estes termos e os polinômios na equação 2, e efetuando as devidas operações, tem-se:

$$P_3(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

e, conseqüentemente, o valor de $P_3(0,320)$ é $-0,017$.

3 Exercícios

1. Aproxime $f(0,05)$ utilizando o Polinômio interpolador de Lagrange e os dados seguintes:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,0	1,00000
1	0,2	1,22140
2	0,4	1,49182
3	0,6	1,82212
4	0,8	2,22554

2. Utilize os polinômios interpoladores de Lagrange para aproximar:

   (a) $f(8,4)$, se $f(8) = 16,63553$, $f(8,1) = 17,61549$, $f(8,3) = 17,56492$, $f(8,6) = 18,50515$ e $f(8,7) = 18,82091$;

   (b) $f(0,25)$, se $f(0) = -1$, $f(0,1) = -0,62049958$, $f(0,2) = -2,8398668$, $f(0,3) = 0,00660095$ e $f(0,4) = 0,24842440$.

3. Construa os polinômios interpoladores de Lagrange para as seguintes funções:

   (a) $f(x) = e^{2x} \cdot \cos 3x$, dados $x_0 = 0$, $x_1 = 0,3$ e $x_2 = 0,6$;

   (b) $f(x) = \sin \ln x$, dados $x_0 = 2,0$, $x_1 = 2,4$ e $x_2 = 2,6$;

   (c) $f(x) = \ln x$, dados $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,3$ e $x_3 = 1,4$;

   (d) $f(x) = \cos x + \sin x$, dados $x_0 = 0$, $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,5$ e $x_3 = 1,0$.

Referências

[1] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. Campos, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.

[2] *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*; Márcia A. G. Ruggiero, Vera L. R. Lopes; Makron Books; Segunda edição; 1996.

[3] *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*; Décio Sperandio, João T. Mendes, Luiz H. Monken e Silva; Prentice-Hall; 2003.

[4] *Análise Numérica*; Richard L. Burden, J. Douglas Faires; Pioneira Thomson Learning; 2003.