Integração Numérica

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
http://www.dca.ufrn.br/

1 Introdução

O conceito de integral está ligado ao problema de determinar a área de uma figura plana qualquer. A definição da área de uma figura plana é feita aproximando a figura por polígonos cujas áreas podem ser calculados pelos métodos de Geometria Elementar.

Considerando a definição da área da figura delimitada por uma função $f(x)$, pelo eixo das abscissas x e por duas retas $x = a$ e $x = b$, como ilustrado pela figura 1.

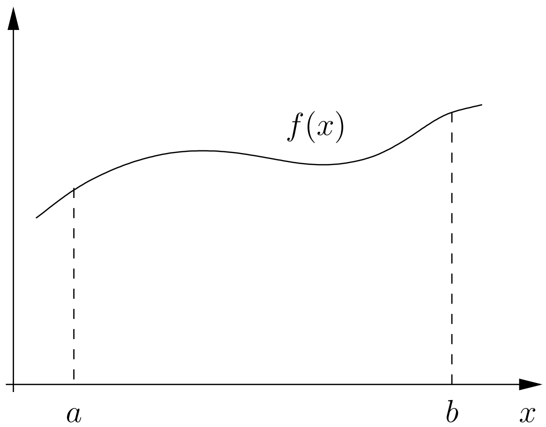

Figura 1: Definição da área delimitada por uma função $f(x)$, por um intervalo $[a, b]$ e pelo eixo dos x.

Dividindo este intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de comprimento

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

onde $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ são os pontos dessa divisão. Em cada um desses intervalos, definem-se os pontos ξ_1 no primeiro, ξ_2 no segundo intervalo, e assim sucessivamente até ξ_n, no último intervalo. Dessa forma, é possível definir uma série de retângulos de base Δx e altura $f(\xi_1)$, $f(\xi_2)$, ..., $f(\xi_n)$ (ver figura 2).

A soma das áreas dos retângulos é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

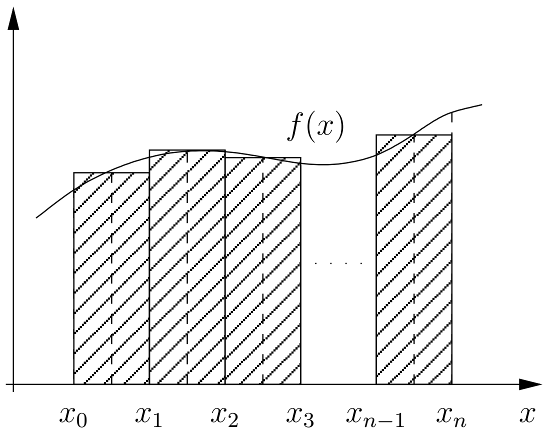

Figura 2: Retângulos definidos nos subintervalos de $[x_0 = a,\, x_n = b]$.

Nota-se que este valor S_n é, aproximadamente, o valor da área delimitada por $f(x)$ e x, no intervalo $[a,\, b]$. Se a quantidade de subintervalos cresce tendendo ao infinito, então obtém-se o conceito d integral:

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

que é chamada de Integral de Riemann. O seu resultado é um valor numérico.

Embora haja um conjunto de regras para calcular a chamada função primitiva $F(x)$, ou seja:

$$F(x) = \int f(x)\cdot \mathrm{d}x$$

em determinados casos, esta função primitiva não é conhecida, ou a sua obtenção não é trivial. Além disso, em situações práticas nem sempre se tem a forma analítica da função a ser integrada, $f(x)$, mas é disponibilizada uma tabela de pontos que descreve o comportamento da função.

Assim, para calcular o valor da integral de $f(x)$ considerando estes casos particulares, torna-se necessário a utilização de métodos numéricos. A solução numérica de uma integral é chamada de *quadratura*. Há dois métodos bastante empregados para calcular a quadratura de uma função:

1. As fórmulas de Newton-Cotes, que empregam valores de $f(x)$, onde os valores de x são igualmente espaçados;
   - Regra dos Trapézios;
   - Regras de Simpson.
2. A fórmula da quadratura gaussiana que utiliza pontos diferentemente espaçados.

Este curso abordará principalmente as fórmulas de Newton-Cotes.

2 Fórmulas de Newton-Cotes

Nas fórmulas de Newton-Cotes a idéia básica é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo $[a,\, b]$ em pontos igualmente espaçados. Assim, o problema fica resolvido pela integração de um polinômio, o que é mais simples de fazer.

Considerando a partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos de comprimento $h = (b-a)/n$, obtém-se n abscissas x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_0 = a$, $x_n = b$ e $x_{i+1} = x_i + h$. As fórmulas fechadas de Newton-Cotes são do tipo:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

onde A_i são coeficientes determinados de acordo com o grau do polinômio interpolador.

2.1 Regra dos Trapézios

Na Regra dos Trapézios utilizam-se apenas duas abscissas separadas por uma distância h. Assim, utiliza-se um polinômio interpolador de primeiro grau. Utilizando a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $P_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 tem-se:

$$f(x) \cong b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x)$$

onde:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x - x_1 \\ p_1(x) &= x - x_0 \\ b_0 &= \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \\ b_1 &= \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Como tem-se apenas dois pontos, $x_0 = a$ e $x_1 = b$. Então $x_1 - x_0 = h$. Assim:

$$f(x) \cong -\frac{f(x_0)}{h}(x - x_1) + \frac{x_1}{h}(x - x_0)$$

Integrando, no intervalo $[x_0, x_1]$, ambos os lados desta aproximação então obtém-se a fórmula geral para a Regra dos Trapézios:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right]$$

Esse resultado corresponde à área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$, como ilustrado na figura 3.

É possível notar que, se o intervalo de integração é grande, a fórmula dos Trapézios fornece resultados que pouco tem a ver com o valor da integral exata. Para diminuir este erro é preciso subdividir o intervalo de integração e aplicar a regra dos Trapézios repetidas vezes, para cada par subseqüente de pontos. Chamando x_i os pontos de divisão de $[a, b]$, tal que $x_{i+1} - x_i = h$, sendo $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_{i+1}} f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

ou, de uma forma mais simplificada:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

cuja interpretação geométrica está ilustrada na figura 4.

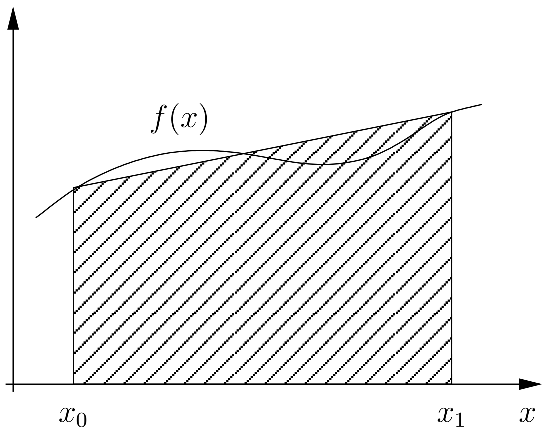

Figura 3: Interpretação gráfica da Regra dos Trapézios.

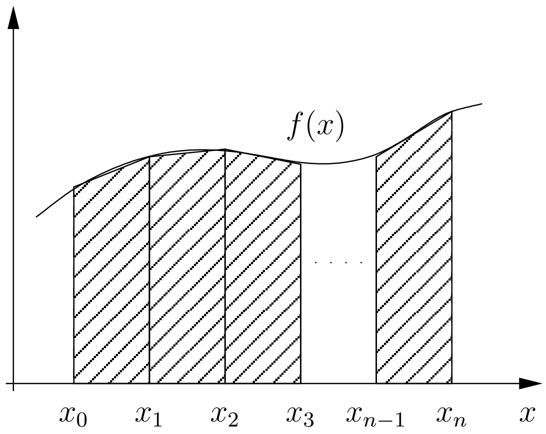

Figura 4: Interpretação gráfica da Regra dos Trapézios repetida.

Exemplo 1 *Seja $I = \int_0^1 \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{d}x$, calcular uma aproximação para I utilizando 10 subintervalos e a regra dos Trapézios repetida.*

Para 10 subintervalos tem-se um passo h igual a:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$$

Dessa forma, como $x_{i+1} = x_i + h$, então:

$$\begin{array}{lcl} x_0 & = & 0.0 \\ x_1 & = & 0.1 \\ x_2 & = & 0.2 \\ & \vdots & \\ x_9 & = & 0.9 \\ x_{10} & = & 1.0 \end{array}$$

Assim:

$$I \cong \frac{0.1}{2} \left[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{0.1} + \mathrm{e}^{0.2} + \ldots + \mathrm{e}^{0.9} + \mathrm{e}^1 \right] = 1.719713$$

2.2 Primeira Regra de Simpson

Esta primeira regra é obtida aproximando-se a função $f(x)$ por um polinômio interpolador de segundo grau. Para isto, serão necessário 3 pontos ($x_0 = a$, x_1 e $x_2 = b$) igualmente espaçados.

$$f(x) \cong b_0 p_0(x) + b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x)$$

onde os termos $p_i(x)$ são:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \\ p_1(x) &= (x - x_0)(x - x_2) \\ p_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

e os termos b_i são:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ b_1 &= \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ b_2 &= \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

Dessa forma, tem-se que a fórmula geral para a Primeira Regra de Simpson é obtida através de:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \cdot \mathrm{d}x \cong b_0 \int_{x_0}^{x_2} p_0(x) \cdot \mathrm{d}x + b_1 \int_{x_0}^{x_2} p_1(x) \cdot \mathrm{d}x + b_2 \int_{x_0}^{x_2} p_2(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Resolvendo estas integrais e, depois, substituindo $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h$, a fórmula geral fica igual a:

$$\int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \cong \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \right]$$

cuja interpretação significa que os pontos x_0, x_1 e x_2 são interpolados pelo polinômio de Lagrange de segundo grau.

Exemplo 2 *Seja $f(x)$ uma função conhecida apenas nos pontos tabelados a seguir. Utilizando a primeira regra de Simpson, encontrar uma aproximação para $\int_2^4 f(x) \cdot \mathrm{d}x$.*

i	x_i	$f(x_i)$
0	2.0	41
1	3.0	130
2	4.0	297

Como, neste caso, o espaçamento h é igual a 1, então:

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x) \cdot \mathrm{d}x &\cong \frac{1}{3} \left[f(2.0) + 4f(3.0) + f(4.0) \right] \\ &\cong \frac{1}{3} \left[41 + 4 \cdot 130 + 297 \right] = 286 \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi realizado com a Regra dos Trapézios, deve-se subdividir o intervalo de integração $[a, b]$ em n subintervalos iguais de amplitude h e, a cada *par de* *subintervalos*, aplicar a Primeira Regra de Simpson. Uma observação importante é que o número de subintervalos deverá ser sempre par.

Assim, sendo $h = (b-a)/n$, os pontos serão $x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n = b$. A aproximação da integral de uma função ficará:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x \;&\cong\; \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+\frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]+\ldots+\\ &+\frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]\end{aligned}$$

que de uma maneira mais simplificada será:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x \;&\cong\; \frac{h}{3}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\left(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{n-2})\right)+\right.\\ &+\left.\;4\left(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\right)\right]\end{aligned}$$

Exemplo 3 *Adicionando alguns pontos na tabela do exemplo 2, tem-se:*

i	x_i	$f(x_i)$
0	2.0	41
1	2.5	77.25
2	3.0	130
3	3.5	202.25
4	4.0	297

Recalcular a integral $\int_2^4 f(x)\cdot \mathrm{d}x$ *utilizando a Primeira Regra de Simpson repetida.*

Neste caso, o espaçamento é $h = 0.5$. Assim:

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)\cdot \mathrm{d}x \;&\cong\; \frac{0.5}{3}\left[f(x_0)+f(x_4)+2f(x_2)+4\left(f(x_1)+f(x_3)\right)\right]\\ &\cong\; \frac{0.5}{3}\left[41+297+2\cdot 130+4\left(77.25+202.25\right)\right]=286\end{aligned}$$

2.3 Segunda Regra de Simpson

De maneira análoga às anteriores, a Segunda Regra de Simpson é obtida aproximando-se a função $f(x)$ pelo polinômio interpolador de terceiro grau. Dessa forma, através da metodologia de Lagrange:

$$f(x) \cong b_0p_0(x)+b_1p_1(x)+b_2p_2(x)+b_3p_3(x)$$

onde os termos $p_i(x)$ são:

$$\begin{aligned}p_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\\ p_1(x) &= (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\\ p_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\\ p_3(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\end{aligned}$$

e os termos b_i são:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\\
b_1 &= \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\
b_2 &= \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\\
b_3 &= \frac{f(x_3)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

Assim:

$$\int_a^b f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong b_0\int_a^b p_0(x)\cdot \mathrm{d}x + b_1\int_a^b p_1(x)\cdot \mathrm{d}x + b_2\int_a^b p_2(x)\cdot \mathrm{d}x + b_3\int_a^b p_3(x)\cdot \mathrm{d}x \quad (1)$$

Como utiliza-se um polinômio de terceiro grau, então são necessários quatro pontos a serem interpolados:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a\\
x_1 &= x_0 + h\\
x_2 &= x_0 + 2h\\
x_3 &= x_0 + 3h = b
\end{aligned}
\quad (2)
$$

Fazendo a integração indicada pela aproximação 1 e substituindo os termos dados pelas equações 2, então fica-se com a seguinte fórmula geral para a Segunda Regra de Simpson:

$$\int_{x_0=a}^{x_3=b} f(x)\cdot \mathrm{d}x \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right]$$

Esta segunda regra também é conhecida como a Regra dos 3/8.

Subdividindo o intervalo $[a,\, b]$ em n subintervalos, onde n deverá ser múltiplo de 3, tem-se a seguinte fórmula para a aplicação repetida:

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_n} f(x)\cdot \mathrm{d}x \;\;\cong\;\; & \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+2f(x_3)+\right.\\
& + 3f(x_4)+3f(x_5)+2f(x_6)+\ldots+\\
& \left.+ 3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo 4 *Calcular o valor da integral*

$$I = \int_1^4 \ln\left(x^3+\sqrt{\mathrm{e}^x+1}\right)\cdot \mathrm{d}x$$

aplicando a regra dos 3/8 *com 3 e 9 subintervalos.*

Para 3 subintervalos, tem-se que $h = \frac{4-1}{3} = 1$. Assim:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \quad\rightarrow\quad f(1) = 1.0744\\
x_1 &= 1+1 = 2 \quad\rightarrow\quad f(2) = 2.3884\\
x_2 &= 2+1 = 3 \quad\rightarrow\quad f(3) = 3.4529\\
x_3 &= 3+1 = 4 \quad\rightarrow\quad f(4) = 4.2691
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$I \cong \frac{3 \cdot 1}{8} [1.0744 + 3 \cdot 2.3884 + 3 \cdot 3.4529 + 4.2691] = 8.5753$$

Para 9 subintervalos, tem-se que:

$$h = \frac{4-1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Pode-se construir uma tabela utilizando este h e $x_0 = a = 1$, resultando em:

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1.0744
1	4/3	1.5173
2	5/3	1.9655
3	2	2.3884
4	7/3	2.7768
5	8/3	3.1305
6	3	3.4529
7	10/3	3.7477
8	11/3	4.0187
9	4	4.2691

Aplicando a fórmula da segunda regra de Simpson repetida, tem-se:

$$\begin{aligned} I \quad \cong \quad & \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + 2f(x_6) + \\ & + \; 3f(x_7) + 3f(x_8) + f(x_9)] \end{aligned}$$

Por fim, substituindo os valores correspondentes, o resultado é $I \cong 8.5619$.

3 Exercícios

1. Calcular os valores das integrais a seguir utilizando a Regra dos Trapézios.
   (a) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x+1} \cdot \mathrm{d}x$;
   (b) $\int_4^{4.5} \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{d}x$; e
   (c) $\int_3^6 (3x+2) \cdot \mathrm{d}x$.

2. Dada a função $y = f(x)$ através da tabela a seguir, calcular o valor de $I = \int_0^3 f(x) \cdot \mathrm{d}x$ utilizando a Regra dos Trapézios.

i	x_i	y_i
0	0.0	5.021
1	0.5	6.146
2	1.0	6.630
3	1.5	6.940
4	2.0	7.178
5	2.5	7.364
6	3.0	7.519

3. Resolver as integrais a seguir utilizando a Primeira Regra de Simpson, com $n = 4$.
   (a) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x+1)\cos(x^2) \cdot \mathrm{d}x$; e
   (b) $\int_1^2 \mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{d}x$.

4. Resolver as integrais a seguir utilizando a Primeira Regra de Simpson, com $n = 6$.
   (a) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{(x-1)^2} \cdot \mathrm{d}x$; e
   (b) $\int_3^{3.3} (x^3 + x^2 + x + 1) \cdot \mathrm{d}x$.

5. Dada a função $y = f(x)$, definida através da tabela a seguir, calcular $\int_1^{1.6} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ aplicando:
   (a) A primeira Regra de Simpson; e
   (b) A segunda Regra de Simpson.

i	x_i	y_i
0	1.0	0.099
1	1.1	0.131
2	1.2	0.163
3	1.3	0.194
4	1.4	0.2244
5	1.5	0.253
6	1.6	0.281

6. Determinar o valor I para $n = 3$, aplicando a Regra dos Trapézios e a segunda Regra de Simpson.

$$I = \int_1^{1.3} \left(2x^3 + x^2 + x - 2\right) \cdot \mathrm{d}x$$

Referências

[1] *Cálculo 1 – Funções de uma Variável*; Geraldo Ávila; Quarta edição; Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.; 1981.

[2] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. Campos, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.

[3] *Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais*; Márcia A. G. Ruggiero, Vera L. R. Lopes; Makron Books; Segunda edição; 1996.