Ajuste de Curvas

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
`http://www.dca.ufrn.br/`

1 Introdução

É bastante comum em engenharia a realização de testes de laboratório para a validação de sistemas reais. Os resultados são obtidos na forma de pontos cujo comportamento demonstra o relacionamento de uma *variável independente* (ou explicativa) com uma, ou mais, *variável dependente* (ou resposta). O gráfico destes pontos é chamado de diagrama de dispersão (ver figura 1).

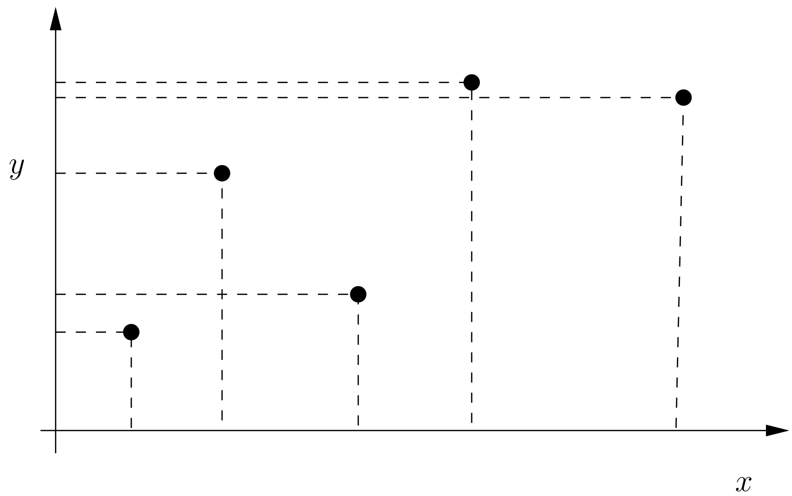

Figura 1: Exemplo ilustrativo de um diagrama de dispersão.

Entretanto, dado um diagrama de dispersão, é pouco provável que haja uma curva que passe exatamente por cada ponto e que descreva fielmente o sistema observado em laboratório. A razão disto é que a obtenção de dados experimentais possuem erros inerentes ao processo. Além do mais, algumas variáveis podem sofrer alterações durante a experiência, o que irá provocar desvios na resposta.

Dessa forma, para definir uma função analítica que descreva o sistema não se deve optar por uma forma polinomial interpoladora dos pontos fornecidos, e sim uma curva que melhor se ajusta a estes pontos levando em consideração a existência de erros que, em geral, não são previsíveis (ver figura 2).

Uma das vantagens de se obter uma curva que se ajusta adequadamente a estes pontos, é a possibilidade de prever os valores da função (variável dependente) para valores da

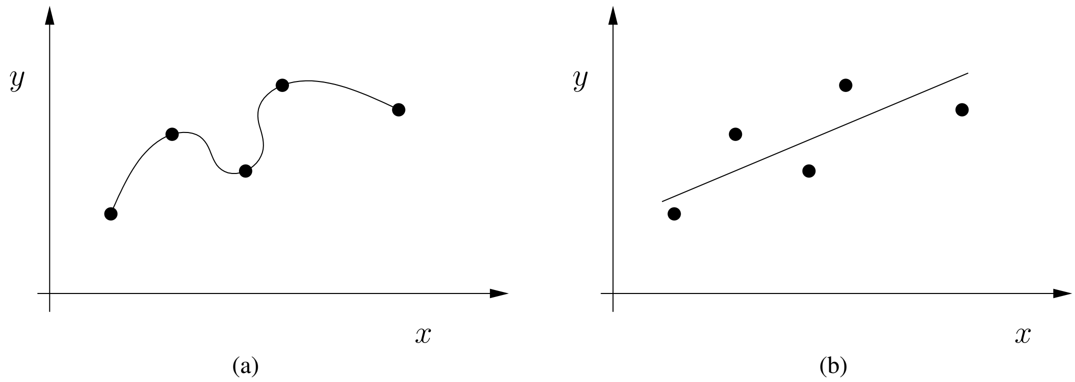

Figura 2: Exemplos ilustrativos de uma curva polinomial interpoladora (a) e uma curva que se ajusta aos pontos de um diagrama de dispersão (b).

variável explicativa que estão fora do intervalo fornecido. Ou seja, é possível fazer uma extrapolação com uma aproximação razoável.

Como o sistema da experiência é descrito por um conjunto de pontos, então a abordagem a ser apresentada será válida para os casos discretos. Assim, o problema de ajuste de curvas no caso em que se tem uma tabela de pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), com x_i pertencentes ao intervalo $[a, b]$, consiste em dadas $m + 1$ funções $g_0(x)$, $g_1(x)$, ..., $g_m(x)$, contínuas em $[a, b]$, obter $m + 1$ coeficientes β_0, β_1, ..., β_m de tal forma que

$$f(x) = \beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \ldots + \beta_m g_m(x)$$

se aproxime de $y(x)$, que fornece os valores y_1, y_2, ..., y_n dos pontos tabelados.

Este é um modelo matemático linear do sistema real pois os coeficientes β_i a serem determinados aparecem linearmente arranjados, embora as funções $g_i(x)$ possam ser não-lineares, como $g_0(x) = \mathrm{e}^x$ e $g_1(x) = 1 + x^2$, por exemplo.

O grande problema é como escolher adequadamente estas funções. Para isto, normalmente faz-se a observação do diagrama de dispersão para ver a forma geral dos pontos, ou então deve-se basear em fundamentos teóricos do experimento que fornece a tabela.

Uma idéia para que a função $f(x)$ se ajuste aos pontos y_i é fazer com que o desvio, ou erro, $d_i = y_i - f(x_i)$ seja mínimo para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, definindo uma medida mais abrangente que envolve a soma destes desvios elevados ao quadrado tem-se:

$$\begin{aligned} D(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m) &= \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 g_0(x) - \beta_1 g_1(x) - \ldots - \beta_m g_m(x)]^2 \end{aligned}$$

O que se busca então é determinar os β_i's para que $D(\cdot)$ seja mínimo. Este processo de minimização é chamado de *Método dos Mínimos Quadrados*, uma vez que $D(\cdot)$ é definido por uma soma de quadrados.

Do cálculo diferencial, sabe-se que para determinar o valor mínimo de uma função (ou o seu valor crítico) deve-se derivar parcialmente esta função em relação às variáveis independentes. Dessa forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial \beta_0} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 g_0(x_i) - \beta_1 g_1(x_i) - \ldots - \beta_m g_m(x_i)] \cdot g_0(x_i) \\
\frac{\partial D}{\partial \beta_1} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 g_0(x_i) - \beta_1 g_1(x_i) - \ldots - \beta_m g_m(x_i)] \cdot g_1(x_i) \\
\frac{\partial D}{\partial \beta_2} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 g_0(x_i) - \beta_1 g_1(x_i) - \ldots - \beta_m g_m(x_i)] \cdot g_2(x_i) \\
&\vdots \\
\frac{\partial D}{\partial \beta_m} &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 g_0(x_i) - \beta_1 g_1(x_i) - \ldots - \beta_m g_m(x_i)] \cdot g_m(x_i)
\end{aligned}
$$

Substituindo $\sum_{i=1}^{n}$ por $\sum$ para simplificação de notação, igualando estas equações a 0 e fazendo um rearranjo de termos então tem-se:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum g_0(x_i)^2\right)\beta_0 + \left(\sum g_1(x_i)g_0(x_i)\right)\beta_1 + \ldots + \left(\sum g_0(x_i)g_m(x_i)\right)\beta_m &= \sum y_i g_0(x_i) \\
\left(\sum g_0(x_i)g_1(x_i)\right)\beta_0 + \left(\sum g_1(x_i)^2\right)\beta_1 + \ldots + \left(\sum g_1(x_i)g_m(x_i)\right)\beta_m &= \sum y_i g_1(x_i) \\
&\vdots \\
\left(\sum g_0(x_i)g_m(x_i)\right)\beta_0 + \left(\sum g_1(x_i)g_m(x_i)\right)\beta_1 + \ldots + \left(\sum g_m(x_i)^2\right)\beta_m &= \sum y_i g_m(x_i)
\end{aligned}
$$

que se trata de um sistema linear que pode ser solucionado por qualquer método numérico apresentadado (Gauss, Jordan, LU, Gaus com pivotamento parcial ou total, etc.). As equações deste sistema são chamadas de *equações normais*. Nota-se que a matriz dos coeficientes deste sistema é simétrica com relação a diagonal principal, ou seja, a parte triangular inferior é igual a parte triangular superior.

2 Ajuste Linear Simples

O modelo mais simples de relacionar duas variáveis é através de uma equação de reta, caracterizando um comportamento linear do sistema que foi submetido à experiência. Se a distribuição dos pontos no diagrama de dispersão assumir uma aparência de uma reta, então pode-se afirmar que:

$$
\begin{aligned}
g_0(x) &= 1 \\
g_1(x) &= x \\
g_2(x) &= g_3(x) = \ldots = g_m(x) = 0
\end{aligned}
$$

o que faz com que o modelo matemático que se ajuste aos pontos do diagrama de dispersão seja uma equação de reta, dada por:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

O problema então é determinar β_0 e β_1. Sabe-se, porém, que para diferentes valores destes coeficientes (ou parâmetros) haverá diferentes retas que se ajustam aos pontos dados. Dessa forma, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados para minimizar a medida:

$$D(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i]^2$$

e substituindo $\sum_{i=1}^{n}$ por $\sum$ para simplificação da notação ter-se-á o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

cuja solução geral é:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \\ \beta_0 &= \frac{\sum y_i - \left(\sum x_i\right) \beta_1}{n} \end{aligned} \tag{1}$$

Exemplo 1 Ajustar os dados da tabela a seguir a uma reta de modo que $D(\beta_0, \beta_1)$ seja o menor possível.

i	x_i	y_i
1	1.3	2.0
2	3.4	5.2
3	5.1	3.8
4	6.8	6.1
5	8.0	5.8

Como se deseja encontrar os valores dos parâmetros da reta dados pelas equações 1 então basta encontrar os respectivos somatórios:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} x_i &= 1.3 + 3.4 + 5.1 + 6.8 + 8.0 = 24.6 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= 1.3^2 + 3.4^2 + 5.1^2 + 6.8^2 + 8.0^2 = 149.5 \\ \sum_{i=1}^{5} y_i &= 2.0 + 5.2 + 3.8 + 6.1 + 5.8 = 22.9 \\ \sum_{i=1}^{5} y_i x_i &= (2.0 \cdot 1.3) + (5.2 \cdot 3.4) + (3.8 \cdot 5.1) + (6.1 \cdot 6.8) + (5.8 \cdot 8.0) = 127.54 \end{aligned}$$

Substituindo estes valores nas equações 1 tem-se:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{5 \cdot 127.54 - 24.6 \cdot 22.9}{5 \cdot 149.5 - 24.5^2} = 0.522 \\ \beta_0 &= \frac{22.9 - 24.6 \cdot 0.522}{5} = 2.01 \end{aligned}$$

que resulta na reta $f(x) = 2.01 + 0.522x$. Utilizando o Scilab para gerar o gráfico tem-se:

```
-->x = [1.3 3.4 5.1 6.8 8];
-->y = [2 5.2 3.8 6.1 5.8];
-->plot2d(x,y,-3,"051")
```

```
-->for i=1:5
-->z(i) = 2.01+0.522*x(i);
-->end
-->plot2d(x,z)
```

O resultado obtido está apresentado na figura 3.

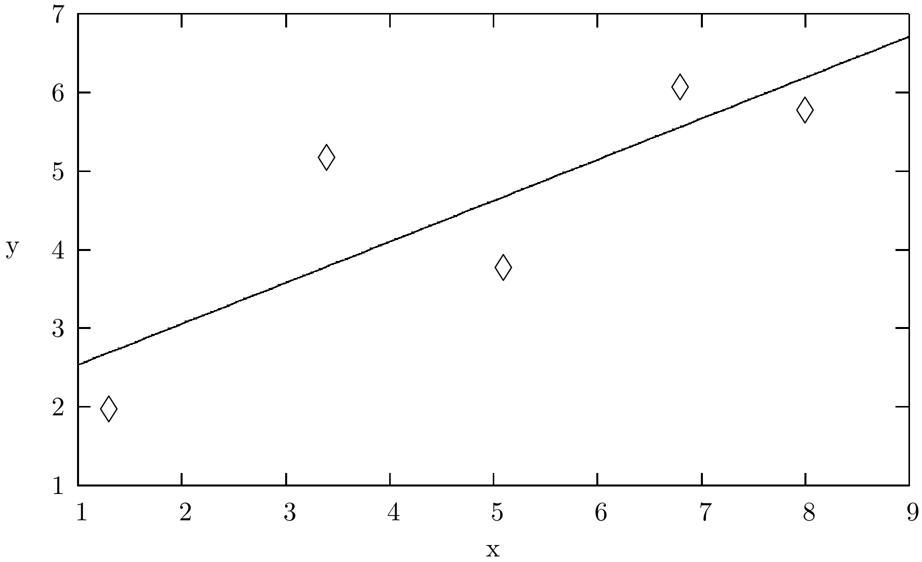

Figura 3: Exemplo de um ajuste linear.

3 Ajuste Linear Múltiplo

Quando, em uma experiência, a variável resposta depende de duas ou mais variáveis explicativas e o gráfico de dispersão apresenta um comportamento linear, pode-se então aplicar o ajuste linear múltiplo. Para estes casos tem-se:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \\ g_1(x) &= X_1 \\ g_2(x) &= X_2 \\ &\vdots \\ g_m(x) &= X_m \end{aligned}$$

onde X_i, com $i = 1, 2, \ldots, m$, são variáveis distintas entre si. Isto resulta na seguinte equação:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m$$

Pode-se mostrar, de maneira análoga ao ajuste linear simples, que as estimativas de β_j que minimizam a soma dos quadrados dos desvios é a solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \dots & \sum X_{mi} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{2i}X_{1i} & \dots & \sum X_{mi}X_{1i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \dots & \sum X_{mi}X_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{mi} & \sum X_{1i}X_{mi} & \sum X_{2i}X_{mi} & \dots & \sum X_{mi}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i X_{1i} \\ \sum y_i X_{2i} \\ \vdots \\ \sum y_i X_{mi} \end{bmatrix}$$

A resolução deste sistema por qualquer método numérico apresentado dá o valor dos coeficientes β_j.

Exemplo 2 Ajustar os pontos da tabela a seguir à equação $f(x) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
X_{1i}	−1	0	1	2	4	5	5	6
X_{2i}	−2	−1	0	1	1	2	3	4
y_i	13	11	9	4	11	9	1	−1

Para esse diagrama de dispersão o sistema fica igual a:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{2i}X_{1i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i X_{1i} \\ \sum y_i X_{2i} \end{bmatrix}$$

Assim, calculando os somatórios para $n = 8$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} X_{1i} &= -1 + 0 + 1 + 2 + 4 + 5 + 5 + 6 = 22 \\
\sum_{i=1}^{8} X_{2i} &= -2 + (-1) + 0 + 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 8 \\
\sum_{i=1}^{8} X_{1i}^2 &= (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 6^2 = 108 \\
\sum_{i=1}^{8} X_{2i}^2 &= (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 36 \\
\sum_{i=1}^{8} X_{1i}X_{2i} &= (-1)\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 5\cdot 5 + 6\cdot 4 = 57 \\
\sum_{i=1}^{8} y_i &= 13 + 11 + 9 + 4 + 11 + 9 + 1 + (-1) = 57 \\
\sum_{i=1}^{8} y_i X_{1i} &= 13\cdot(-1) + 11\cdot 0 + 9\cdot 1 + 4\cdot 2 + 11\cdot 4 + 9\cdot 5 + 1\cdot 5 + (-1)\cdot 6 = 92 \\
\sum_{i=1}^{8} y_i X_{2i} &= 13\cdot(-2) + 11\cdot(-1) + 9\cdot 0 + 4\cdot 1 + 11\cdot 1 + 9\cdot 2 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 4 = -5
\end{aligned}$$

tem-se como resultado o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 8 & 22 & 8 \\ 22 & 108 & 57 \\ 8 & 57 & 36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 92 \\ -5 \end{bmatrix}$$

que utilizando o Método de Gauss para criar uma matriz triangular superior equivalente e aplicando o algoritmo da substituição retroativa tem-se a seguinte solução:

$$\beta_0 = 4.239 \qquad \beta_1 = 3.4 \qquad \beta_2 = -6.464$$

4 Ajuste Polinomial

Um caso especial de ajuste de curvas ocorre quando o diagrama de dispersão não apresenta as características lineares presentes nos outros tipos de ajuste. Nestas situações pode-se realizar o ajuste polinomial utilizando as seguintes funções $g_i(x)$:

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 \\ g_1(x) &= x \\ g_2(x) &= x^2 \\ g_3(x) &= x^3 \\ &\vdots \\ g_m(x) &= x^m \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se a seguinte equação:

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_m x^m$$

ou seja, $f(x)$ é um polinômio de grau m. Do estudo de interpolação polinomial sabe-se que estes polinômios são apropriados para aproximar funções de maneira satisfatória (como exemplo tem-se a Série de Taylor). Para o ajuste polinomial de curvas, o sistema fica igual a:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \ldots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \ldots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \ldots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \ldots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^m \end{bmatrix}$$

É possível perceber que o ajuste polinomial é um caso particular do ajuste linear múltiplo, porém utilizando uma única variável independente.

Exemplo 3 Ajustar os pontos da tabela a seguir à equação $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

i	x_i	y_i
1	−2.0	−30.5
2	−1.5	−20.2
3	0.0	−3.3
4	1.0	8.9
5	2.2	16.8
6	3.1	21.4

O sistema linear é:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

O cálculo dos somatórios para $n = 6$ é:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} x_i &= -2 + (-1.5) + 0 + 1 + 2.2 + 3.1 = 2.8 \\
\sum_{i=1}^{6} x_i^2 &= (-2)^2 + (-1.5)^2 + 0^2 + 1^2 + 2.2^2 + 3.1^2 = 21.7 \\
\sum_{i=1}^{6} x_i^3 &= (-2)^3 + (-1.5)^3 + 0^3 + 1^3 + 2.2^3 + 3.1^3 = 30.064 \\
\sum_{i=1}^{6} x_i^4 &= (-2)^4 + (-1.5)^4 + 0^4 + 1^4 + 2.2^4 + 3.1^4 = 137.8402 \\
\sum_{i=1}^{6} y_i &= -30.5 + (-20.5) + (-3.3) + 8.9 + 16.8 + 21.4 = -6.9 \\
\sum_{i=1}^{6} y_i x_i &= -30.5 \cdot (-2) + (-20.5) \cdot (-1.5) + (-3.3) \cdot 0 + 8.9 \cdot 1 + \\
&\quad + 16.8 \cdot 2.2 + 21.4 \cdot 3.1 = 203.5 \\
\sum_{i=1}^{6} y_i x_i^2 &= -30.5 \cdot (-2)^2 + (-20.5) \cdot (-1.5)^2 + (-3.3) \cdot 0^2 + 8.9 \cdot 1^2 + \\
&\quad + 16.8 \cdot 2.2^2 + 21.4 \cdot 3.1^2 = 128.416
\end{aligned}$$

que substituindo no sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 6 & 2.8 & 21.7 \\ 2.8 & 21.7 & 30.064 \\ 21.7 & 30.064 & 137.8402 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.9 \\ 203.5 \\ 128.416 \end{bmatrix}$$

e o resultado é:

$$\beta_0 = -2.018 \qquad \beta_1 = 11.33 \qquad \beta_2 = -1.222$$

Plotando a curva no scilab tem-se:

```
-->x = [-2 -1.5 0 1 2.2 3.1];
-->y = [-30.5 -20.2 -3.3 8.9 16.8 21.4];
-->plot2d(x,y,-3)
-->deff("[a] = f(x)","a = -2.018+11.33*x-1.222*x^2")
-->for i=1:6, z(i) = f(x(i)); end
-->plot2d(x,z)
```

e o resultado pode ser visto na figura 4.

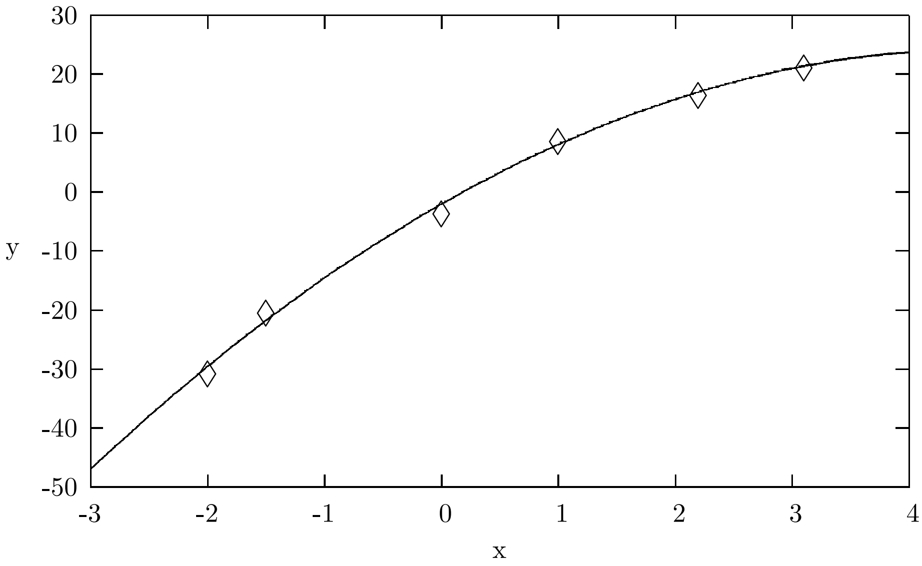

Figura 4: Exemplo de ajuste polinomial.

5 Casos Não-Lineares

Em alguns casos, a família de funções $g_i(x)$ pode ser não-linear nos parâmetros, como, por exemplo, se o diagrama de dispersão de uma determinada função se ajustar a uma exponencial do tipo $f(x) = \beta_0 \cdot \mathrm{e}^{-\beta_1 x}$, com β_0 e β_1 positivos.

Para se aplicar o método dos mínimos quadrados é necessário que se efetue uma linearização. Por exemplo, se $y(x) \cong \beta_0 \cdot \mathrm{e}^{-\beta_1 x}$ então:

$$z = \ln y(x) \cong \ln \beta_0 - \beta_1 x$$

Se $\alpha_0 = \ln \beta_0$ e $\alpha_1 = -\beta_1$ então $\ln y(x) \cong f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ que é um problema linear nos parâmetros.

O método dos mínimos quadrados pode então ser aplicado na resolução do *problema linearizado*. Obtidos os parâmetros deste problema, usa-se estes valores para calcular os parâmetros originais.

É importante observar que os parâmetros assim obtidos não são ótimos dentro do critério dos mínimos quadrados. Isto porque o que se ajusta é o problema linearizado, e não o original.

Exemplo 4 Ajustar os pontos a seguir à equação $y = \beta_0 \cdot \mathrm{e}^{\beta_1 x}$.

i	x_i	y_i
1	0.1	5.9
2	1.5	8.8
3	3.3	12.0
4	4.5	19.8
5	5.0	21.5

Aplicando o logaritmo neperiano aos dois lados da equação, tem-se:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln(\beta_0 \cdot \mathrm{e}^{\beta_1 x}) \\
\ln y &= \ln \beta_0 + \beta_1 x \\
\ln y &= \alpha_0 + \alpha_1 x
\end{aligned}$$

Fazendo $z = \ln y$, então altera-se a tabela original:

i	x_i	z_i
1	0.1	1.77
2	1.5	2.17
3	3.3	2.48
4	4.5	2.99
5	5.0	3.07

Como é um sistema linearizado 2×2, então pode-se aplicar diretamente a solução dada pelas equações 1. Assim, tem-se os seguintes valores para os parâmetros linearizados:

$$\alpha_0 = 1.734 \qquad \alpha_1 = 0.2646$$

A curva linearizada pode ser visulizada na figura 5

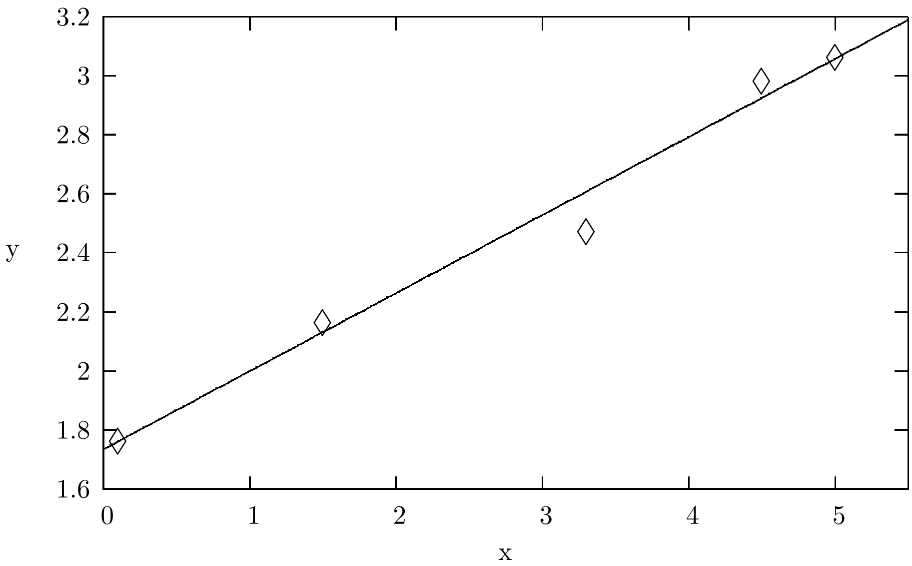

Figura 5: Curva do problema linearizado.

Como $\alpha_0 = \ln \beta_0$ e $\alpha_1 = \beta_1$, então tem-se os seguintes parâmetros originais:

$$\beta_0 = 5.663 \qquad \beta_1 = 0.2646$$

que resulta na função $y(x) = 5.663 \cdot \mathrm{e}^{0.2646x}$ e cujo gráfico está na figura 6.

Observação 1 Alguns exemplos de transformação são:

$$\begin{aligned}
y &= a \cdot \mathrm{e}^{bx} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + b \cdot x \\
y &= a \cdot b^{x} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + (\ln b) \cdot x \\
y &= a \cdot x^{b} \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + b \cdot \ln x \\
y &= \mathrm{e}^{(a+bx_1+cx_2)} \quad \rightarrow \quad \ln y = a + bx_1 + cx_2 \\
y &= a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdot x_3^d \quad \rightarrow \quad \ln y = \ln a + b \cdot \ln x_1 + c \cdot \ln x_2 + d \cdot \ln x_3 \\
y &= \frac{1}{a + bx_1 + cx_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} = a + bx_1 + cx_2 \\
y &= \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{(a+bx_1+cx_2)}} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = a + bx_1 + cx_2
\end{aligned}$$

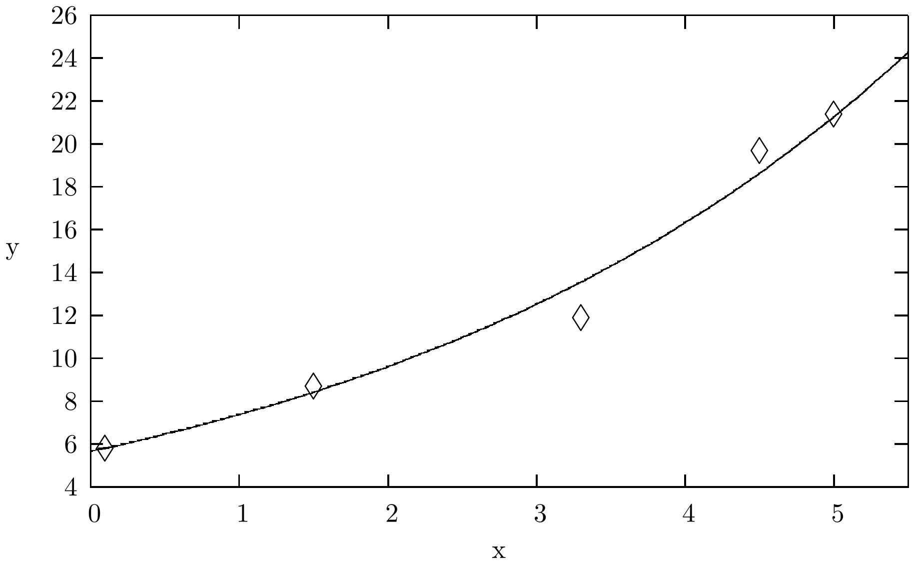

Figura 6: Curva do problema original.

6 Exercícios

1. Aproxime a tabela a seguir pela função $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

i	1	2	3	4	5
x_i	12	16	20	30	40
y_i	1.64	2.72	3.96	7.60	11.96

2. Determine uma aproximação linear para a curva $y = e^x$ tal que os desvios desta aproximação na malha $[-1, 1]$, com espaçamento de 0.5 seja o menor possível. Refaça o ajuste com um polinômio de segundo grau.

3. Os valores funcionais mostrados na tabela a seguir são medidas de uma quantidade $A(t)$ em metros que varia no tempo. Escolha convenitentemente um conjunto de funções $g_i(x)$ para encontrar uma aproximação para $A(t)$ que ajuste, por mínimos quadradados, os seguintes dados:

t	0	2	4	6	8	10
$A(t)$	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

4. Determine uma aproximação da forma

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} + kt$$

que ajuste por mínimos quadrados os seguintes dados:

t	1	2	3	4	5	7	10
$1/c$	24.7	32.4	38.4	45.0	52.3	65.6	87.6

5. Considere os valores funcionais dados na tabela abaixo e determine as seguintes aproximações para y:

(a) $f(x) = c_1 + \frac{c_2}{x}$; e

(b) $f(x) = \alpha \cdot \mathrm{e}^{-\beta x}$.

i	1	2	3	4	5
x_i	0.5	1	2	4	5
y_i	15	12	5	2	1

6. Determine a equação da parábola no plano xy que passa pela origem, tem eixo vertical e melhor se ajusta aos pontos $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(2, 5)$ no sentido de mínimos quadrados.

7. Deduzir as equações normais para o modelo $y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$.

8. Aproximar a função $y = \sqrt[3]{x}$ no intervalo $[0, 1]$ por um polinômio de terceiro grau, usando os valores de x com incremento de 0.1. Resolva este mesmo problema com um polinômio de segundo grau e compare os resultados.

9. Aproximar a função $y = \sin x$ no intervalo $[0, \pi/2]$ por um polinômio de segundo grau usando os valores de x com incremento de 0.1π.

10. Ajustar os dados da tabela a seguir ao modelo $z = a \cdot b^x$.

i	1	2	3	4	5
x_i	0.1	1.5	3.3	4.5	5.0
y_i	5.9	8.8	12.0	19.8	21.5

Referências

[1] *Cálculo Numérico (com aplicações)*; Leônidas C. Barroso, Magali M. A. Barroso, Frederico F. Campos, Márcio L. B. Carvalho, Miriam L. Maia; Editora Harbra; Segunda edição; 1987.

[2] *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*; Décio Sperandio, João T. Mendes, Luiz H. Monken e Silva; Prentice-Hall; 2003.