Integração Numérica – Roteiro de Aula

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
http://www.dca.ufrn.br/~diogo
diogo@dca.ufrn.br

1 Introdução

Integração $\longrightarrow$ área que uma curva faz sobre um eixo (figura 1).

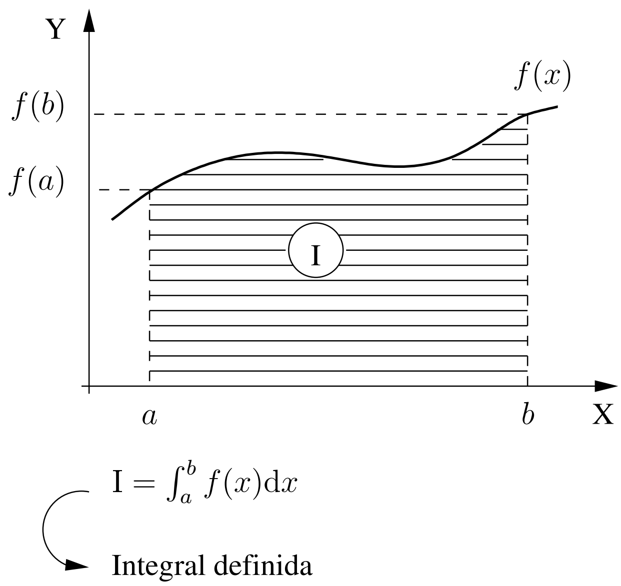

Figura 1: Definição teórica de uma integral definida.

Problemas práticos:

1. A forma analítica de $f(x)$ é desconhecida;
2. A função $f(x)$ não possui uma primitiva $F(x)$ conhecida ($F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$);
3. O processo de integração de $f(x)$ é complexo.

A utilização de métodos numéricos para calcular a integral definida de uma função qualquer possui duas abordagens distintas:

1. Fórmulas de Newton-Côtes $\longrightarrow$ empregam valores de $f(x)$, onde os valores de x são igualmente espaçados entre si;

2. Fórmulas da Quadratura Gaussiana $\longrightarrow$ utilizam valores de $f(x)$, mas com valores de x diferentemente espaçados.

2 Fórmulas de Newton-Côtes

Idéia básica: substituição da função $f(x)$ por um polinômio interpolador em um intervalo $[a,\ b]$ com $(n+1)$ valores de x igualmente distanciados entre si por $h = (b-a)/2$. Dessa forma, sendo:

$$\begin{cases} x_0 &= a \\ x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_0 + 2h \\ & \vdots \\ x_n &= x_0 + nh = b \end{cases}$$

tem-se que:

$$f(x) \cong \beta_0 p_0(x) + \beta_1 p_1(x) + \ldots + \beta_n p_n(x)$$

que integrando fica:

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x)\mathrm{d}x \cong \beta_0 \int_{x_0}^{x_n} p_0(x)\mathrm{d}x + \beta_1 \int_{x_0}^{x_n} p_1(x)\mathrm{d}x + \ldots + \beta_n \int_{x_0}^{x_n} p_n(x)\mathrm{d}x$$

Os principais métodos são:

1. Regra dos trapézios; e

2. Regras de Simpson.

3 Regra dos Trapézios

São utilizados dois pontos para avaliação. Assim:

$$f(x) \cong \beta_0 p_0(x) + \beta_1 p_1(x)$$

com $p_0(x) = x - x_1$, $p_1(x) = x - x_0$, $\beta_0 = \frac{f(x_0)}{p_0(x_0)}$ e $\beta_1 = \frac{f(x_1)}{p_1(x_1)}$.

Sabendo que $x_1 = x_0 + h$, então:

$$f(x) \cong \frac{f(x_0)}{-h}(x - x_1) + \frac{f(x_1)}{h}(x - x_0)$$

Integrando ambos os lados, tem-se:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{f(x_0)}{-h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_1)\mathrm{d}x + \frac{f(x_1)}{h}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)\mathrm{d}x$$

com o seguinte resultado:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

que é a regra dos trapézios. A sua interpretação geométrica é que ela aproxima a integral da função $f(x)$ pela área do trapézio de altura h e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$ (figura 2).

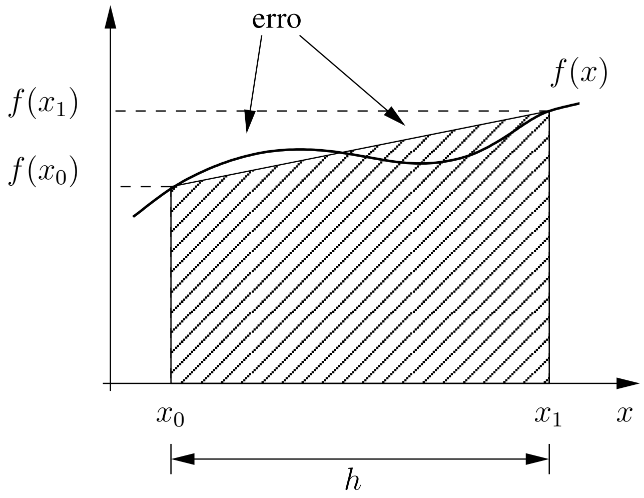

Figura 2: Integral calculada pela regra dos trapézios.

Para diminuir o erro desta regra, deve-se aumentar a quantidade de pontos dentro do intervalo de integração. Assim, para os $(n+1)$ pontos do intervalo $[a,\ b]$, deve-se aplicar repetidamente a regra dos trapézios para cada par de pontos consecutivos (ver figura 3) de forma que a integral numérica fique como:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1)+f(x_2)] + \ldots + \frac{h}{2}[f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

ou, rearrumando a fórmula:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x \cong \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

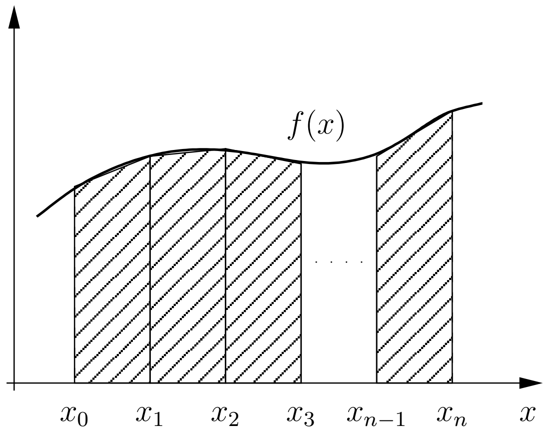

Figura 3: Utilização da regra do trapézio repetidas vezes.

Exemplo: calcular

$$\mathrm{I} = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

realizando uma subdivisão de 6 intervalos. Verifique o erro absoluto e trabalhe com 6 casas decimais.

Para verificar o erro absoluto, deve-se calcular a integral analítica. Assim:

$$\mathrm{I} = \int_{3,0}^{3,6} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x)\Big|_{3,0}^{3,6} = \ln(3,6) - \ln(3,0) = 0,182322$$

Para calcular a integral numérica, deve-se calcular o espaçamento h. Dessa forma:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3,6-3,0}{6} = 0,1$$

Com este espaçamento, cria-se uma tabela com 7 valores de x e de $f(x)$, lembrando que $f(x) = \frac{1}{x}$. Assim:

x	$f(x)$
3,0	0,333333
3,1	0,322581
3,2	0,312500
3,3	0,303030
3,4	0,294118
3,5	0,285714
3,6	0,277778

Portanto, a integral numérica pela regra dos trapézios é:

$$\mathrm{I} \cong \frac{0,1}{2}\left[f(3,0)+2f(3,1)+2f(3,2)+2f(3,3)+2f(3,4)+2f(3,5)+f(3,6)\right]$$
$$\mathrm{I} \cong 0,182350$$

O erro absoluto é:

$$e_a = |0,182322 - 0,182350| = 0,000028$$

4 Exercícios

1. Calcular o valor das integrais a seguir utilizando a regra dos trapézios.
   (a) $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x+1}\mathrm{d}x$, $n=5$;
   (b) $\int_4^{4,5} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$, $n=5$;
   (c) $\int_3^6 (3x+2)\mathrm{d}x$, $n=5$;
   (d) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x+1)\cos(x^2)\mathrm{d}x$, $n=4$;
   (e) $\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$, $n=4$;
   (f) $\int_{-2}^{-1} \frac{x^2}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$, $n=6$;
   (g) $\int_3^{3,3} (x^3+x^2+x+1)\mathrm{d}x$, $n=6$;
   (h) $\int_1^4 \ln(x^3+\sqrt{\mathrm{e}^x+1})\mathrm{d}x$, $n=10$.
2. Ache o valor das integrais das funções definidas pelas seguintes tabelas.

x	$f(x)$
0,0	5,021
0,5	6,146
1,0	6,630
1,5	6,940
2,0	7,178
2,5	7,364
3,0	7,519

x	$f(x)$
1,0	0,099
1,1	0,131
1,2	0,163
1,3	0,194
1,4	0,224
1,5	0,253
1,6	0,281