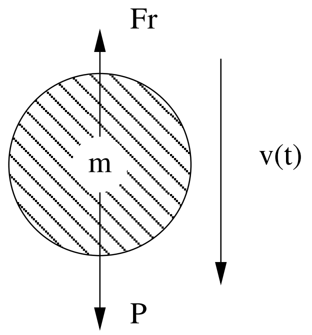
Resolução Numérica de E.D.O. – Roteiro de Aula

Diogo Pinheiro Fernandes Pedrosa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia de Computação e Automação
http://www.dca.ufrn.br/∼diogo
diogo@dca.ufrn.br

1 Introdução

Problema: análise de um corpo de massa m que cai com uma velocidade $v(t)$. Este corpo sofre uma força de resistência do ar na forma $F_r = c \cdot v(t)$, onde c é o coeficiente de resistência.



Sendo a força que leva o corpo para baixo dada por:

$$F = P - F_r$$

com peso $P = m \cdot g$. Sabendo que $F = m \cdot a(t)$, então:

$$m \cdot a(t) = m \cdot g - c \cdot v(t)$$

Porém, $a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$. Assim, isolando esta derivada:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g - \frac{c}{m}v(t)$$

Como esta equação envolve uma função $v(t)$ desconhecida, com uma variável independente t, e sua derivada, ela é chamada de *equação diferencial.* Toda equação diferencial expressa a velocidade de mudança da função envolvida em relação à variável independente.

Se a equação diferencial envolver uma função que dependa apenas de uma única variável independente, ela é chamada de *ordinária.* Toda equação diferencial ordinária pode ser classificada de acordo com sua ordem (maior derivada envolvida). Por exemplo, a equação diferencial do corpo em queda livre é de primeira ordem.

Uma solução de uma equação diferencial é uma função específica da variável independente e de parâmetros. Ela deve satisfazer a equação diferencial original. Para que seja possível determinar uma solução particular da equação diferencial ordinária, é necessário que algumas condições auxiliares sejam apresentadas. Dependendo do tipo de equação diferencial, estas condições são chamadas de *condições iniciais.*

Assim, serão tratados métodos de resolução numérica de equações diferenciais ordinárias (E.D.O.) com problema de valor inicial (P.V.I.), que possui a seguinte forma geral:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

onde x_0 e y_0 são as condições iniciais.

2 Solução Numérica

A solução numérica é encontrada para um conjunto de pontos no eixo da variável independente. Assim, sendo um intervalo $[a,\ b]$ no eixo x, deve-se dividir este intervalo em n subintervalos de comprimento $h = (b - a)/n$, de tal forma que sejam gerados $(n + 1)$ valores de x:

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_1 & = & x_0 + h \\ x_2 & = & x_0 + 2h \\ & \vdots & \\ x_n & = & x_0 + nh = b \end{cases}$$

ou, de maneira geral, $x_{k+1} = x_k + h$, com $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Este conjunto de $(n + 1)$ valores é chamado de malha. E é para cada um dos valores desta malha que será encontrado uma aproximação do valor real $y(x_k)$, que é a solução da E.D.O. Esta aproximação será representada pelo xímbolo y_k. Há três métodos principais:

1. Método de Euler;

2. Métodos de Runge-Kutta;

3. Métodos de Adams-Bashforth.

Observação: Toda solução numérica para E.D.O.s envolve dois tipos de erros:

1. Erro de arredondamento: representação numérica na máquina;

2. Erro de truncamento: fórmula deduzida da Série de Taylor truncada.

Além destes erros, tem-se uma outra parcela chamada de *erro propagado*, que se origina através da propagação, e aumento, do erro gerado na primeira iteração ao longo das iterações seguintes (ver figura 1).

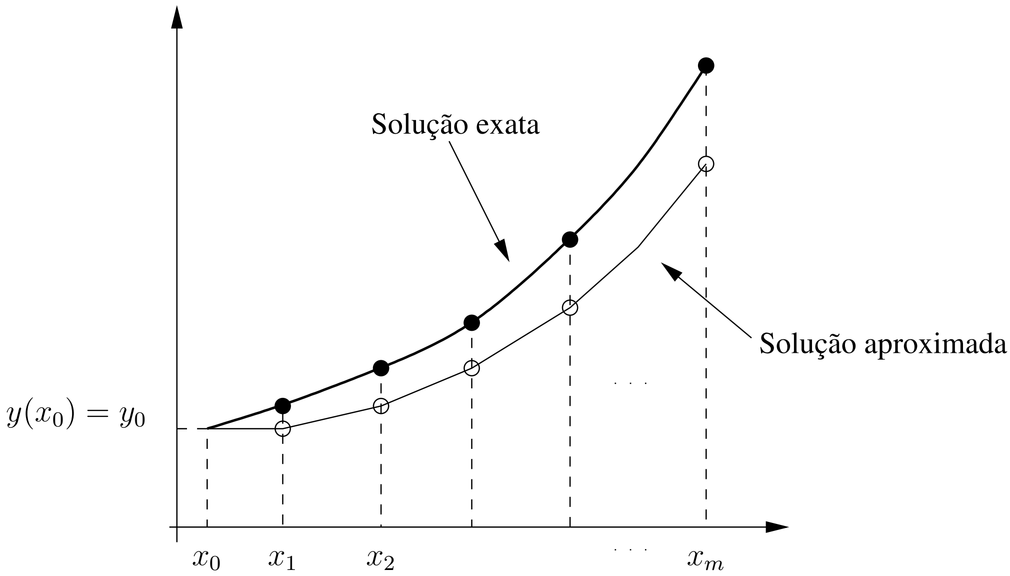


Figura 1: Exemplo ilustrativo do erro no método de Euler.

3 Método de Euler

Dada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem com problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

e uma malha $x \in [a,\ b]$, pode-se aproximar a função $y(x)$ (que é a solução desejada), por um polinômio da série de Taylor em torno de um valor x_k da malha. Assim:

$$y(x) = y(x_k) + y'(x_k)\frac{(x - x_k)}{1!} + y''(x_k)\frac{(x - x_k)^2}{2!} + \dots$$

Truncando esta série no segundo termo e fazendo $x = x_{k+1}$ para encontrar o valor dado pela função $y(x)$ no próximo ponto da malha, tem-se:

$$y(x_{k+1}) \cong y(x_k) + y'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Porém, $x_{k+1} - x_k = h$ e:

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f(x, y(x)) \longrightarrow y'(x_k) = f(x_k, y(x_k))$$

Assim, fazendo as devidas substituições:

$$y(x_{k+1}) \cong y(x_k) + h \cdot f(x_k, y(x_k))$$

Mas como o cálculo implica em encontrar aproximações dos valores reais, então se utiliza a notação adequada:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

que é a equação do método de Euler para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Exemplo: resolver a E.D.O. com P.V.I. a seguir na malha $x \in [0,\ 1]$, com $h = 0,25$, usando o método de Euler.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Para determinar até que valor vai o índice k, então:

$$h = \frac{b-a}{n} \rightarrow n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{0,25} = 4$$

Dessa forma, o índice k vai variar de 0 até 3. Da condição inicial do problema pode-se deduzir que $x_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Além disso, tem-se que:

$$f(x_k, y_k) = y_k - \frac{2x_k}{y_k}$$

Para $k = 0$:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0,25 = 0,25$$

$$f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,25 \cdot 1 = 1,25$$

Para $k = 1$:

$$x_2 = x_1 + h = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} = 1,25 - \frac{2 \cdot 0,25}{1,25} = 0,85$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,25 + 0,25 \cdot 0,85 = 1,4625$$

Para $k = 2$:

$$x_3 = x_2 + h = 0,25 + 0,5 = 0,75$$

$$f(x_2, y_2) = y_2 - \frac{2x_2}{y_2} = 1,4625 - \frac{2 \cdot 0,5}{1,4625} = 0,77874$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,4625 + 0,25 \cdot 0,77874 = 1,6572$$

Para $k = 3$:

$$x_4 = x_3 + h = 0,25 + 0,75 = 1,00$$

$$f(x_3, y_3) = y_3 - \frac{2x_3}{y_3} = 1,6572 - \frac{2 \cdot 0,75}{1,6572} = 0,75222$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,6572 + 0,25 \cdot 0,75222 = 1,84526$$

Sendo $k = 3$ a última iteração, então a solução consiste na tabela a seguir:

x	y
0,00	1,00000
0,25	1,25000
0,50	1,46250
0,75	1,65720
1,00	1,84526

4 Exercícios

1. Considere as Equações Diferenciais Ordinárias com Problema de Valor Inicial a seguir. Encontre a sua solução aproximada nas malhas especificadas com o espaçamento apropriado utilizando o método de Euler. Para cada problema, há a solução analítica. Dessa forma, varifique os erros absolutos. Todos os cálculos devem ser realizados com quatro casas decimais, no mínimo.

   (a) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = yx^2 - y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

   com $h = 0,5$ e $x \in [0,\ 2]$. Solução analítica $y(x) = \mathrm{e}^{(1/3)x^3 - x}$

   (b) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + (x - y)^2 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

   com $h = 0,25$ e malha $x \in [2,\ 3]$. Solução analítica $y(x) = x + \frac{1}{1-x}$

   (c) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\mathrm{e}^{3x} - 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   com $h = 0,25$ e $x \in [0,\ 1]$. Solução analítica: $y(x) = \frac{1}{5}x\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{25}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{25}\mathrm{e}^{-2x}$

   (d) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + 2x^3)y^3 - xy \\ y(0) = 1/3 \end{cases}$

   com $h = 0,5$ e malha $x \in [0,\ 2]$. Solução analítica: $y(x) = (3 + 2x^2 + 6\mathrm{e}^{x^2})^{-1/2}$