

O posto da matriz é o número de linhas não-nulas da matriz escalonada. Precisamos definir também o conceito de matriz aumentada do sistema, que é dada por $[A : b]$ sendo portanto:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\rangle$$

Chamaremos de p_a o posto da matriz aumentada e p_c o posto da matriz dos coeficientes.

- Se $p_a = p_c$ garantimos que existe pelo menos uma solução para o sistema;
- Se $p_c = n$ garantimos que a solução do sistema, caso exista, é única;
- Se $p < n$ garantimos que a solução do sistema, caso exista, não é única;
- Se $p < m$ não garantimos a existência de solução.

2.2. Métodos Diretos

2.2.1. Método de Gauss

O método de Gauss é utilizado quando a matriz A é quadrada, de dimensão $n \times n$, e consiste em transformar a matriz $[A : b]$, chamada de matriz aumentada do sistema, em uma matriz triangular superior através de transformações elementares, ou seja, o sistema original $Ax = b$ é transformado em $Ux = c$ de modo que:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right\rangle \xrightarrow{\text{Transformações}} \left\langle \begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & c_n \end{array} \right\rangle$$

As transformações elementares possíveis sobre a matriz aumentada do sistema são:

- a) Trocar a ordem de duas linhas;
- b) Multiplicar uma linha por uma constante não-nula;
- c) Adicionar duas linhas.

Uma matriz é dita triangular superior quando $u_{ij} = 0$ para $j < i$ com $i, j = 1, 2, \dots, n$. De posse da matriz triangular superior equivalente utiliza-se substituições retroativas para encontrar o vetor solução.

A matriz triangular superior equivalente nos fornecerá o seguinte sistema de equações lineares que possui a mesma solução do sistema original:

$$\begin{aligned} L_1^{(1)} &\leftarrow L_1^{(0)} \\ L_2^{(1)} &\leftarrow L_2^{(0)} + m_{21}^{(0)} L_1^{(0)} \\ L_3^{(1)} &\leftarrow L_3^{(0)} + m_{31}^{(0)} L_1^{(0)} \end{aligned}$$

As transformações acima resultam na matriz:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

2ª Etapa

A partir de B_1 escolhe-se $a_{22}^{(1)}$ como pivô e calcula-se o multiplicador.

$$m_{32}^{(1)} = -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} = -\frac{-6}{-2} = -3$$

As transformações elementares para encontrar uma matriz B_2 que é a matriz triangular superior são:

$$\begin{aligned} L_1^{(2)} &\leftarrow L_1^{(1)} \\ L_2^{(2)} &\leftarrow L_2^{(1)} \\ L_3^{(2)} &\leftarrow L_3^{(1)} + m_{32}^{(1)} L_2^{(1)} \end{aligned}$$

Com essas transformações encontramos a matriz triangular superior equivalente à matriz aumentada original:

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Usando substituições retroativas teremos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \\ 5x_3 = 15 \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{15}{5} \Rightarrow x_3 = 3$$

$$-2x_2 - 3 = -7 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$$

O vetor solução do sistema é $\bar{x} = [1 \ 2 \ 3]^T$.

A seguir será mostrado um dispositivo prático para facilitar a triangularização:

Linha	Multiplicador	Coefficiente das Incógnitas	Termos Independentes	Transformações
(1)		2 3 -1	5	
(2)	$-(4/2) = -2$	4 4 -3	3	
(3)	$-(2/2) = -1$	2 -3 1	-1	
(4)		0 -2 -1	-7	$-2(1)+(2)$
(5)	$-(-6/-2) = -3$	0 -6 2	-6	$-1(1)+(3)$
(6)		0 0 5	15	$-3(4)+(5)$

Exemplo 2.2

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 3,0x_2 + 9,3x_3 + 11,0x_4 = 16,4 \\ 24,5x_1 - 8,8x_2 + 11,5x_3 - 45,1x_4 = -49,7 \\ 52,3x_1 - 84,0x_2 - 23,5x_3 + 11,4x_4 = -80,8 \\ 21,0x_1 - 81,0x_2 - 13,2x_3 + 21,5x_4 = -106,3 \end{cases}$$

Linha	Multiplicador	Coefficiente das Incógnitas	TI	Transformações
(1)		8,7 3,0 9,3 11,0	16,4	
(2)	-2,82	24,5 -8,8 11,5 -45,1	-49,7	
(3)	-6,01	52,3 -84,0 -23,5 11,4	-80,8	
(4)	-2,41	21,0 -81,0 -13,2 21,5	-106,3	
(5)		0,0 -17,26 -14,73 -76,12	-95,95	$-2,82(1)+(2)$
(6)	-5,91	0,0 -102,03 -79,39 -54,71	-179,36	$-6,01(1)+(3)$
(7)	-5,11	0,0 -88,23 -35,61 -5,01	-145,82	$-2,41(1)+(4)$
(8)		0,0 0,0 7,66 395,16	387,70	$-5,91(5)+(6)$
(9)	-5,18	0,0 0,0 39,66 383,96	344,48	$-5,11(5)+(7)$
(10)		0,0 0,0 0,0 -1662,97	-1663,81	$-5,18(8)+(9)$

O sistema equivalente após a aplicação do método de Gauss é:

$$\begin{cases} 8,7x_1 + 3,0x_2 + 9,3x_3 + 11,0x_4 = 16,4 \\ -17,26x_2 - 14,73x_3 - 76,12x_4 = -95,95 \\ 7,66x_3 + 395,16x_4 = 387,70 \\ -1662,97x_4 = -1663,81 \end{cases}$$

Utilizando substituições retroativas teremos:

$$\bar{x} = [0,97 \quad 1,98 \quad -0,97 \quad 1,00]^T$$

Para avaliar a precisão dos cálculos da aplicação deste método pode-se calcular o resíduo que é dado por:

$$r = b - A\bar{x}$$

ou seja:

$$r = \begin{bmatrix} 16,4 \\ -49,7 \\ -80,8 \\ -106,3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8,7 & 3,0 & 9,3 & 11,0 \\ 24,5 & -8,8 & 11,5 & -45,1 \\ 52,3 & -84,0 & -23,5 & 11,4 \\ 21,0 & -81,0 & -13,2 & 21,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,97 \\ 1,98 \\ -0,97 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} 0,042 \\ 0,214 \\ 0,594 \\ -0,594 \end{bmatrix}$$

2.2.2. Refinamento de Soluções

Devido ao fato de trabalharmos com cálculos aproximados, como no exemplo 2.2, teremos erros de arredondamento os quais podem se propagar no decorrer do processo de triangularização e substituições retroativas.

Esses erros podem comprometer o resultado do sistema, o que não é desejado.

Supondo que $\bar{x}^{(0)}$ seja uma solução inicial encontrada para um certo sistema $Ax = b$, teremos uma solução melhorada $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \delta^{(0)}$ em que $\delta^{(0)}$ é uma parcela de correção. Desse modo teremos que $A\bar{x}^{(1)} = b$. Assim:

$$A(\bar{x}^{(0)} + \delta^{(0)}) = b$$

$$A\bar{x}^{(0)} + A\delta^{(0)} = b$$

$$A\delta^{(0)} = b - A\bar{x}^{(0)}$$

$$A\delta^{(0)} = r^{(0)}$$

Desse modo podemos concluir que para se obter a parcela de correção $\delta^{(0)}$ basta encontrar a solução do sistema linear $A\delta^{(0)} = r^{(0)}$ em que $r^{(0)}$ é o resíduo produzido pela solução $\bar{x}^{(0)}$.

Com uma nova aproximação $\bar{x}^{(1)}$ e um novo resíduo $r^{(1)}$ podemos calcular outra aproximação. Este processo repete-se até se obter uma precisão desejada.

Exemplo 2.3 – Usar a técnica de refinamento para o exemplo 2.2

O vetor solução inicial do exemplo 2.2 é $\bar{x}^{(0)} = [0,97 \quad 1,98 \quad -0,97 \quad 1,00]^T$ com resíduo $r^{(0)} = [0,042 \quad 0,214 \quad 0,594 \quad -0,594]^T$.

Resolvendo o sistema $A\delta^{(0)} = r^{(0)}$ para encontrar a parcela de correção teremos que:

$$\delta^{(0)} = [0,0295 \quad 0,0195 \quad -0,0294 \quad 0,0000]^T$$

Desse modo a solução refinada será $\bar{x}^{(1)} = \bar{x}^{(0)} + \delta^{(0)}$ o que resulta em:

$$\bar{x}^{(1)} = [1,000 \quad 2,000 \quad -0,999 \quad 1,000]^T$$

com resíduo:

$$r^{(1)} = [-0,009 \quad -0,011 \quad 0,024 \quad 0,013]^T$$

Caso se deseje uma precisão ainda melhor da solução é possível repetir-se o processo o que nos forneceria a parcela de correção:

$$\delta^{(1)} = [0,0295 \quad 0,0195 \quad -0,0294 \quad 0,0000]^T$$

com o vetor solução:

$$\bar{x}^{(1)} = [1,000 \quad 2,000 \quad -1,000 \quad 1,000]^T$$

e resíduo $r^{(1)} = [-0,009 \quad -0,011 \quad 0,024 \quad 0,013]^T$.

As linhas dos pivôs são chamadas de linhas pivotais. É possível que alguma linha possua pivô nulo, o que é inadmissível no método de Gauss. Quando isso acontece pode-se trocar as linhas do sistema convenientemente para se ter um pivô não nulo. Há ainda o método da pivotação parcial que consiste em trocar as linhas convenientemente de modo que o pivô sempre seja o maior valor possível em módulo. Um resultado ainda mais eficiente pode ser encontrado no método da pivotação completa.

2.2.3. Método da Decomposição LU

O método de decomposição LU consiste em decompor a matriz dos coeficientes em um produto de duas matrizes:

$$A = LU$$

Reescrevendo o sistema original $Ax = b$ teremos $LUx = b$. Fazendo $y = Ux$ teremos $Ly = b$. Esta decomposição do sistema original produz dois sistemas lineares a serem resolvidos. Sabendo que matrizes L e U são dadas por:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

resolvemos por substituição direta o sistema $Ly = b$ e com o vetor y calculado podemos encontrar o vetor solução \bar{x} resolvendo por substituição retroativa o sistema $Ux = y$.

Este exemplo literal traz um sistema de equações com 3 equações e 3 incógnitas. Assim, fazendo $A = LU$ teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

1ª Etapa

A primeira etapa consiste em determinar $u_{1k} = a_{1k}$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Para isso multiplicamos a 1ª linha de L pelas colunas de U e igualamos ao elemento adequado da 1ª linha de A .

2ª Etapa

Determinar $l_{k1} = \frac{a_{k1}}{u_{11}}$ para $k = 2, \dots, n$ multiplicando as linhas de L pela 1ª coluna de U e igualando ao elemento adequado da 1ª coluna de A .

3ª Etapa

Continuando com o mesmo raciocínio temos para os elementos restantes:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{ij}}; i > j$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}; i \leq j$$

É importante ressaltar que esses elementos devem ser calculados no algoritmo de uma ordem definida. Esta ordem deve obedecer ao critério que existem elementos de U que dependem L e elementos de L que dependem de U .

Exemplo 2.4 – Resolver o sistema abaixo pelo método de decomposição LU

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

As matrizes L e U seriam da forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

1ª Etapa

Achar os elementos $u_{1k} = a_{1k}$ para $k = 1, 2, 3$:

$$u_{11} = a_{11} = 4$$

$$u_{12} = a_{12} = 3$$

$$u_{13} = a_{13} = -1$$

2ª Etapa

Determinar $l_{k1} = \frac{a_{k1}}{u_{11}}$ para $k = 2, 3$:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{-2}{4} = -0,5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

3ª Etapa

Determinar os elementos restantes:

$$u_{22} = a_{22} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} u_{kj} = a_{22} - l_{21} u_{12} = -4 - (-0,5 \cdot 3) = -4 + 1,5 = -2,5$$

$$u_{23} = a_{23} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} u_{kj} = a_{23} - l_{21} u_{13} = 5 - (-0,5 \cdot -1) = 5 - 0,5 = 4,5$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - \sum_{k=1}^1 l_{ik} u_{kj}}{u_{22}} = \frac{a_{32} - l_{31} u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - (0,25 \cdot 3)}{-2,5} = \frac{2 - 0,75}{-2,5} = -0,5$$

$$u_{33} = a_{33} - \sum_{k=1}^2 l_{ik} u_{kj} = a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23}) = 6 - [0,25 \cdot -1 + (-0,5 \cdot 4,5)] = 6 - 0,5 = 5,5$$

Observe que esses elementos devem ser calculados nesta ordem que foi mostrada. As matrizes L e U são:

O método iterativo de Jacobi consiste em reescrever as equações do sistema da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)}{a_{nn}} \end{cases}$$

ou para $i = 1, 2, \dots, n$ temos que:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}} \text{ com } j \neq i$$

Caso $a_{ii} = 0$ devemos reorganizar as equações de modo a fazer com que sempre $a_{ii} \neq 0$. Quanto mais iterações forem realizadas mais precisa será a solução, no entanto devemos estabelecer um critério de parada do algoritmo. Um dos critérios possíveis é o cálculo da diferença entre uma aproximação $k+1$ e a aproximação anterior k e compara-la a uma tolerância ε , ou seja:

$$\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

Exemplo 2.5 – Resolver o sistema de equações lineares abaixo para pelo método de Jacobi com tolerância $\varepsilon \leq 10^{-2}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Reescrevendo as equações de acordo com o método, temos que:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k)}) \end{cases}$$

Estabelecendo um vetor solução inicial $x^{(0)} = [0 \ 0]^T$ teremos:

$$\text{para } k = 0 \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0,5 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(0)}) = \frac{1}{2}(3 - 0) = 1,5 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,5; 1,5) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 1 \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,5) = 1,25 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,5) = 1,25 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,75;0,25) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 2 \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,25) = 1,125 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,25) = 0,875 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,125;0,375) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 3 \begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,875) = 0,938 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(3)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,125) = 0,938 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,187;0,063) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 4 \begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(4)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,938) = 0,969 \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(4)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,938) = 1,031 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,031;0,093) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 5 \begin{cases} x_1^{(6)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(5)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,031) = 1,016 \\ x_2^{(6)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(5)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,969) = 1,016 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(6)} - x_i^{(5)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,047;0,015) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 6 \begin{cases} x_1^{(7)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(6)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,016) = 1,008 \\ x_2^{(7)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(6)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,016) = 0,992 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(7)} - x_i^{(6)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,008;0,024) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 7 \begin{cases} x_1^{(8)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(7)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,992) = 0,996 \\ x_2^{(8)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(7)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,008) = 0,996 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max|x_i^{(8)} - x_i^{(7)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,012;0,004) \leq 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 8 \quad \begin{cases} x_1^{(9)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(8)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,996) = 0,998 \\ x_2^{(9)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(8)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,996) = 1,002 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(9)} - x_i^{(8)}| \leq \varepsilon \Rightarrow \max(0,002; 0,006) \leq 0,01$? Verdadeiro

Como o critério de parada é satisfeito então o algoritmo para e os valores de $x_1^{(9)} = 0,998$ e $x_2^{(9)} = 1,002$ são o vetor solução. Assim $\bar{x} = [0,998 \quad 1,002]^T$.

2.3.2. Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel consiste em uma melhoria no método de Jacobi. Este método consiste em utilizar valores já calculados naquele passo $x_i^{(k+1)}$ para calcular o valor de outra incógnita $x_{i+1}^{(k+1)}$. Isso faz com que a convergência deste método seja mais rápida do que o método de Jacobi. Podemos reescrever o sistema de equações da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{cases}$$

ou seja:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)})$$

Um critério de parada possível é dado por:

$$\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

em que ε é uma tolerância.

Tanto o método de Jacobi quanto o método de Gauss-Seidel permitem um critério de parada que pode ser utilizado juntamente com os critérios já mencionados. Este critério consiste em estipular um número máximo de iterações. O algoritmo pára, quando $k > M$ em que M é o número máximo de iterações.

Exemplo 2.6 – Resolver o sistema de equações lineares abaixo para pelo método de Gauss-Seidel com tolerância $\varepsilon \leq 10^{-2}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema de acordo com o método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$

Estabelecendo o mesmo vetor solução inicial do exemplo 2.5 $x^{(0)} = [0 \ 0]^T$ teremos:

$$\text{para } k = 0 \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(0)}) = \frac{1}{2}(1 + 0) = 0,5 \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(1)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,5) = 1,25 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(1)} - x_i^{(0)}| < \varepsilon \Rightarrow \max(0,5; 1,25) < 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 1 \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,25) = 1,125 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(2)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,125) = 0,9375 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| < \varepsilon \Rightarrow \max(0,625; 0,3125) < 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 2 \begin{cases} x_1^{(3)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(2)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,9375) = 0,96875 \\ x_2^{(3)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(3)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,96875) = 1,015625 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| < \varepsilon \Rightarrow \max(0,15625; 0,078125) < 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 3 \begin{cases} x_1^{(4)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(3)}) = \frac{1}{2}(1 + 1,015625) = 1,0078125 \\ x_2^{(4)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(4)}) = \frac{1}{2}(3 - 1,0078125) = 0,99609375 \end{cases}$$

Teste do critério de parada: $\max |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| < \varepsilon \Rightarrow \max(0,0390625; 0,01953125) < 0,01$? Falso

$$\text{para } k = 4 \begin{cases} x_1^{(5)} = \frac{1}{2}(1 + x_2^{(4)}) = \frac{1}{2}(1 + 0,99609375) = 0,998046875 \\ x_2^{(5)} = \frac{1}{2}(3 - x_1^{(5)}) = \frac{1}{2}(3 - 0,998046875) = 1,0009765625 \end{cases}$$

Teste do critério de parada:

$\max |x_i^{(5)} - x_i^{(4)}| < \varepsilon \Rightarrow \max(0,0009765625; 0,00048828125) < 0,01$? Verdadeiro

O vetor solução portanto é $\bar{x} = [0,998046875 \quad 1,0009765625]$. Percebe-se que com o método de Gauss-Seidel a conversão se deu em menos iterações em relação ao método de Jacobi para uma mesma condição inicial.

2.4. Quando usar métodos diretos ou iterativos

De uma maneira geral podemos afirmar que os métodos iterativos são mais eficientes quando temos a matriz dos coeficientes do tipo esparsa, ou seja, com grande número de zeros entre seus elementos. Os métodos diretos são mais eficientes quando temos sistemas de pequeno porte com matrizes de coeficientes densas.

2.5 Critério de Convergência