Processos Estocásticos

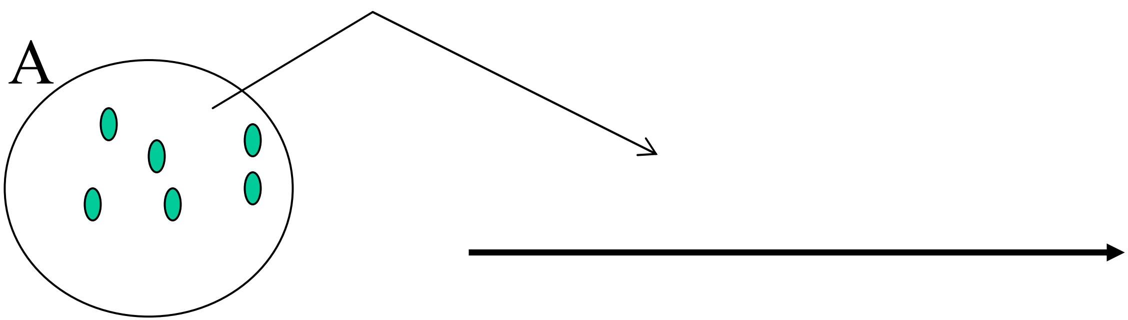
Luiz Affonso Guedes

Sumário

- Probabilidade
- Variáveis Aleatórias
- Funções de Uma Variável Aleatória
- Funções de Várias Variáveis Aleatórias
- Momentos e Estatística Condicional
- Teorema do Limite Central
- Processos Estocásticos
- Análise Espectral
- Filtragem e Predição Estocástica
- Processos Markovianos

Variáveis Aleatórias

- Como devemos descrever um experimento aleatório?
  - Uma boa forma seria associar cada experimento com valores numéricos.



Reais, Inteiros,...

Variáveis Aleatórias

- Definição:
  - Dado um espaço de probabilidade descrito por (S,P), uma variável aleatória (v.a.) sobre esse espaço é uma função sobre S.
  - $X(A) = f(A)$
  - Variável aleatória é uma função dos eventos, não uma variável.

Variáveis Aleatórias

- Exemplos:
  – Seja o Experimento probabilístico de se lançar dois dados. Então seu espaço amostral é:
    - S = {(1,1), (1,2), (1,3), ..., (2,1), (2,2), ..., (6,6)}
    - X(e) – V.A. correspondendo a soma dos valores de cada face.
    - Y(e) – V.A. par ou ímpar, caso a soma dê par ou ímpar, respectivamente.

Variáveis Aleatórias

Espaço de X(e) é {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 ,12

Espaço de Y(e) é {par, ímpar)

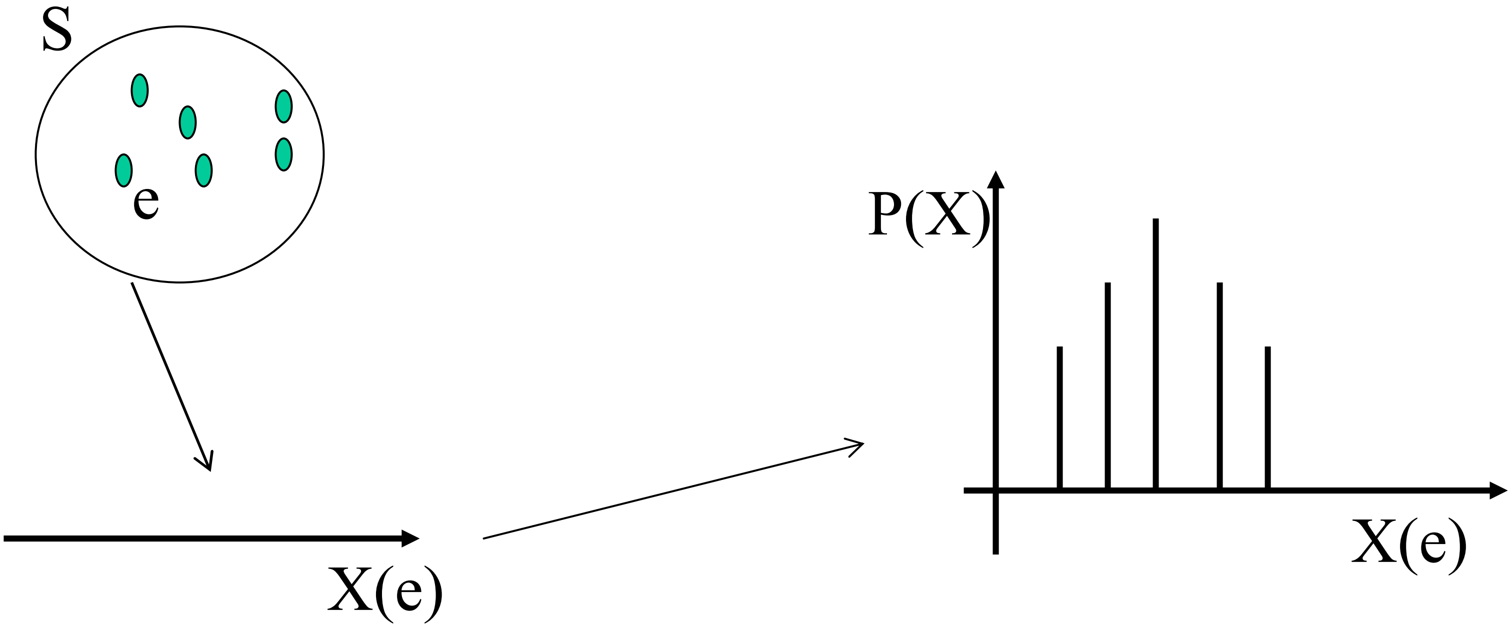
e	X(e)	Y(e)	P(e)
(1,1)	2	par	1/36
(1,2)	3	ímpar	1/36
...			
(2,1)	3	ímpar	1/36
...			
(6,6)	12	par	1/36

Y(e)	P(Y)
par	18/36
ímpar	18/36

$P(X=7) = 1/6$

X(e)	P(X)
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Variáveis Aleatórias



Variáveis Aleatórias

- V.A. Discretas – quando os valores da variável formam um conjunto enumerável.
- V.A. Contínuas – quando os possíveis resultados do experimento são representados por infinitos valores em um intervalo contínuo.
  - Exemplos: temperatura, tempo, valor de tensão.

Funções de Probabilidade de V.A.

- Distribuição: é a função acumulativa de uma v.a.:
  - $F_x(X) = P\{X \leq x\}$, definida para cada x no intervalo de –infinito a +infinito.
- Densidade: é a derivada da função distribuição.
  - $f(X) = dF(X)/dX$
- Exemplo: Jogar uma moeda, X(cara) = 1, X(coroa) = 2.
    - Gráfico de $F_x(X)$ e de sua derivada $f(X)$.

Funções de Probabilidade de V.A.

- Exemplo: Jogar um dado,
  - $X(i = \text{número da face}) = 2.i$
    - Gráfico de $F_x(X)$.
    - $P(X<5)$, $P(2 \leq X<5)$.
    - Gráfico de $f(X)$.
- Exemplo: Uma chamada telefônica ocorre randomicamente num intervalo de tempo entre $(0,T)$. No experimento, os resultados são os instantes de tempo t. A V.A. $X(t) = t$, para $0 \leq t \leq T$.
  - Gráfico de $F(X)$
  - Gráfico de $f(X)$.
  - Se $T = 60$, obter a probabilidade de haver uma chamada até $t = 30$.

Funções Distribuição e Densidade

- Propriedades:
  - F(X) é uma função não decrescente;
  - F(-00) = 0 ; F(+00) = 1;
  - $P(a<x \leq b) = F(b) - F(a)$;
  - $f(x) \geq 0$; para todo x.

- Qual é a interpretação de f(x) para o caso contínuo?

Esperança Matemática de V.A.

- Colocação de um problema:
  - Seja um jogo de dado, sendo que é expresso pela seguinte V.A.:

Face	Ganho
1	+15
2	+10
3	+5
4	0
5	-10
6	-30

- Quais são suas chances no jogo?

Esperança Matemática de V.A.

- Esperança para V.A. Discretas:
  - $E[X(e))] = \sum_{e \in S} X(e)P(e)$

  ou em termos de um conjunto enumerável,

  - $E[X] = \sum_{i=1 \dots \infty} \{x_i P[X=x_i]\}$

  - $E[X] = x_1 P(x_1) + x_2 P(x_2) + \dots + x_n P(x_n)$

  → Desde que $\sum_{i=1 \dots \infty} P(x_i) = 1$, E[X] é basicamente uma média ponderada

Esperança Matemática de V.A.

- Propriedade da linearidade:
  - $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
  - $E[cX] = c.E[X]$

$\rightarrow E[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = E[X_{1]} + E[X_2] + \ldots + E[X_n]$

Esperança Matemática de V.A.

- Exemplos:
  - Uma loteria vende 100 bilhetes a R$1,50, cada. Sendo que o prêmio é de R$100,00. Qual é a sua esperança de ganho se você jogou 1, 2,10 ou 100 bilhetes?
  - Se os números das faces de um dados são a própria v.a., qual é a esperança ao se lançar um dado?

Esperança Matemática de V.A.

- Esperança para V.A. Contínuas:
  - $E[X] = \int_{-\infty,\infty} x\, f(x)\, dx$
  - $f(X=x)\, dX \approx P(X= x)$, interpretação
- Exemplo:
  - $f(x) = 2x$, para $0 \leq x \leq 0{,}5$;

    $= -(2/3)x+(4/3)$, para $0{,}5 \leq x \leq 2{,}0$ e

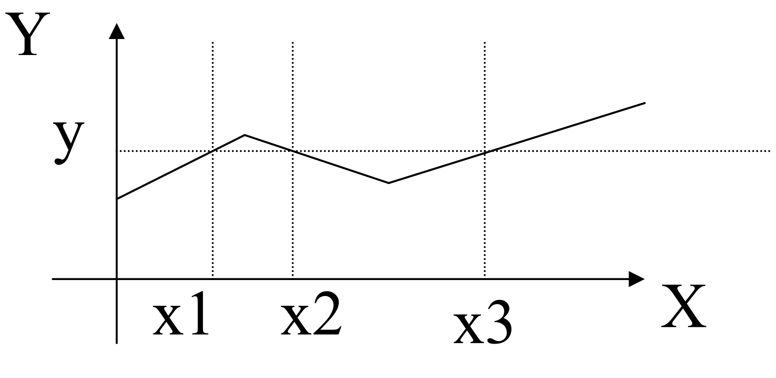
    $= 0$, para os outros valores.
  - Obtenha o gráfico e $E[X]$.

Esperança Matemática de V.A.

- Exemplo: Uma loteria dá 200 prêmios de R$5,00, 20 de R$25,00 e 5 de R$100,00. Admitindo-se que sejam emitidos e vendidos 10.000 bilhetes, qual seria o preço justo par um bilhete?
- Exemplo: Uma moeda, viciada de modo que P(cara)=3/4 e P(coroa)=1/4, é lançada 3 vezes. Seja X a v.a. que representa o número de caras ocorrido. Ache a distribuição e a média de X.

Funções de uma Variável Aleatória

- Seja X uma v.a. discreta definida em um espaço amostral S, g(.) uma função real e Y= g(X). Então:
  - $P[Y=y] = \sum_{x:g(x)=y} P[X=x]$
  - $E[g(X)] = \sum_x g(x)P[X=x]$.   E o caso contínuo?



Funções de uma Variável Aleatória

- Variância:
  - Denotada por $\sigma^2(X)$, a variância de uma v.a. X é definida matematicamente por:
    - $\sigma^2(X) = E[(X - E[X])^2]$, $E[X] = m$, valor médio de X
    - Interpretação para variância.
    - Mostrar que:
      - $\sigma^2(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
    - O que significa: $E[X^2]$?

Funções de uma Variável Aleatória

- Variância:
  - $\sigma^2(X) = \sum_{i=1 \ldots \infty} \{(x_i - E[X])^2 \, P[X=x_i]\}$
  - $\sigma^2(X) = \int_{-\infty,\infty} (x_i - E[X])^2 \, f(x) \, dx$
  - Como calcular variância?
  - Se Y= a X, qual é o valor de $\sigma^2(Y)$?
  - Desvio Padrão : raiz quadrada da variância
    - $\sigma(X)$

Funções de uma Variável Aleatória

- Momentos de V.A.
  - A esperança de $g(X) = X^k$ é denominada momento de ordem k da v.a. X, para k= 1, 2, 3, ...
  - $E[X] \rightarrow$ primeiro momento de X.
  - $\sigma^2(X) \rightarrow$ segundo momento menos o quadrado do primeiro momento.
  - $E(X^k) = \sum_{i=1 \ldots \infty} \{(x_i)^k P[X=x_i]\}$
  - $E(X^k) = \int_{-\infty,\infty} (x_i)^k f(x)\, dx$

Funções de uma Variável Aleatória

- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - A função geradora de momentos da v.a. X, é definida matematicamente por:
    - $\phi_x(t) = E(e^{tX})$, para todo t em que a esperança seja finita.
  - $\phi_x(t) = \sum_{i=1\ldots\infty} \{(e^{t\,xi}) P[X=x_i]\}$
  - $\phi_x(t) = \int_{-\infty,\infty} (e^{tx})\, f(x)\, dx$

Funções de uma Variável Aleatória

- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - Exemplo: Seja X uma V.A. discreta que assume os valores $1,2,...,2^n$, com probabilidades:
    - $P[X=2^n] = 1/2^n$
    - $E[X] = ?$
  - Exemplo: Seja X uma V.A. que assume os valores zero e um, com probabilidades iguais a (1-p) e p, respectivamente.
    - $\phi_x(t) = E[e^{tX}] = 1 - p + p\, e^t, \qquad -\infty < t < \infty$

Funções de uma Variável Aleatória

- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - Exemplo: Seja uma V.A. com densidade de probabilidade $f_x(x) = \lambda\ e^{-\lambda x}$, para $x \geq 0$, onde λ é uma constante positiva. Definir a função geradora de momentos de X.
    - $\phi_x(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty,\infty} e^{tX}\, \lambda\ e^{-\lambda X}\ dx = \lambda/(\lambda - t)$
      - » A integral só é finita para os valores de t tais que $0 < t < \lambda$

Funções de uma Variável Aleatória

- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - Por que $\phi_x(t)$ é denominada de função geradora de momentos?
    - $\phi_x(t) = \int_{-\infty,\infty} (e^{tx})\, f(x)\, dx$, função geradora de momentos
    - $d\,(\phi_x(t))/dt = \int_{-\infty,\infty} (xe^{tx})\, f(x)\, dx$,1ª derivada em t
    - Esta derivada no ponto ZERO:
    - $d\,(\phi_x(0))/dt = \int_{-\infty,\infty} (x)\, f(x)\, dx = E[X]$

Funções de uma Variável Aleatória

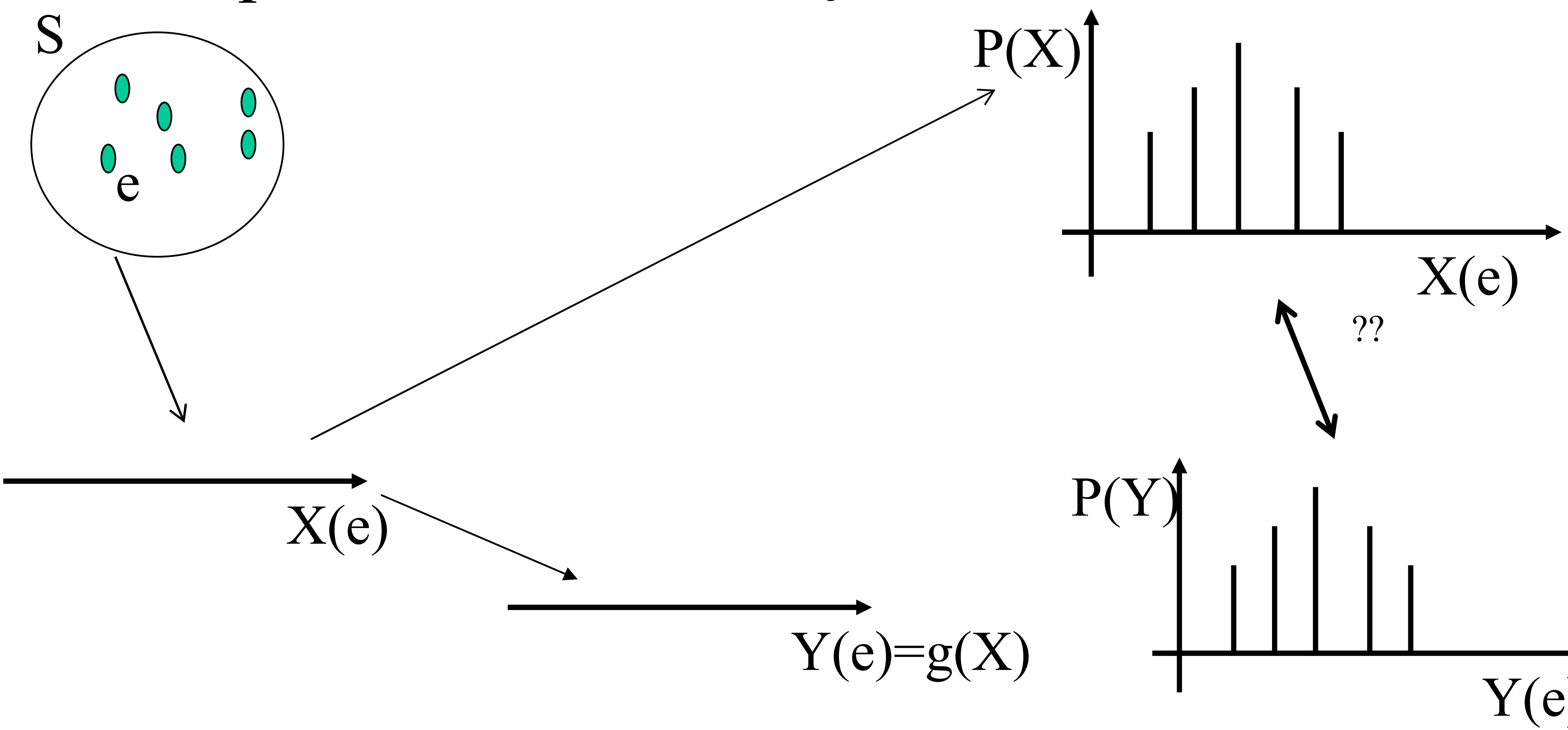
- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - Por que $\phi_x(t)$ é denominada de função geradora de momentos?
    - $\phi_x(t) = \int_{-\infty,\infty} (e^{tx})\, f(x)\, dx$, função geradora de momentos
    - $d^2(\phi_x(t))/dt^2 = \int_{-\infty,\infty} (x^2 e^{tx})\, f(x)\, dx$, 2ª derivada em t
    - Esta segunda derivada no ponto ZERO:
    - $d^2(\phi_x(0))/dt^2 = \int_{-\infty,\infty} (x^2)\, f(x)\, dx = E[X^2]$

Funções de uma Variável Aleatória

- Funções Geradoras de Momento de V.A.
  - Generalização
    - $\phi_x(t) = \int_{-\infty,\infty} (e^{tx})\, f(x)\, dx$, função geradora de momentos
    - $d^n(\phi_x(0))/dt^n = \int_{-\infty,\infty} (x^n)\, f(x)\, dx = E[X^n]$
  - Então, tendo-se uma função geradora de momentos de uma v.a., pode-se obter todos os momentos dessa v.a.

Funções de uma Variável Aleatória

- Mapeamento entre funções de v.a.

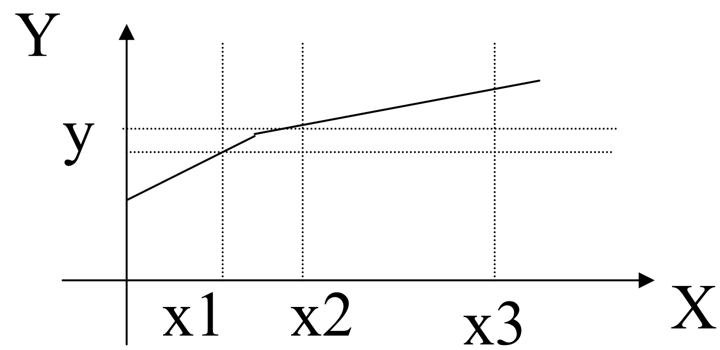


Funções de uma Variável Aleatória

- Mapeamento entre funções de v.a.
  - Para $Y = g(X)$ ser uma v.a., a função $g(X)$ deve ter as seguintes propriedades:
    - Seu domínio deve incluir a imagem da v.a. X.
    - Os eventos $\{g(X) = \pm\propto\}$ devem ter probabilidade zero.
    - $Y = g(X) \leftarrow\rightarrow X = g^{-1}(Y)$

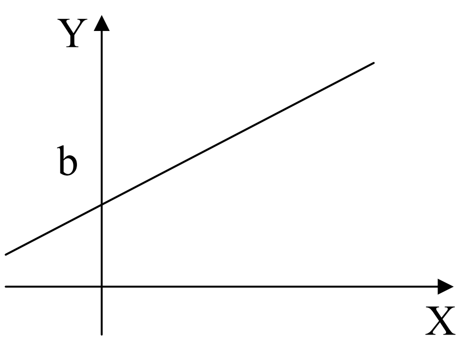
Funções de uma Variável Aleatória

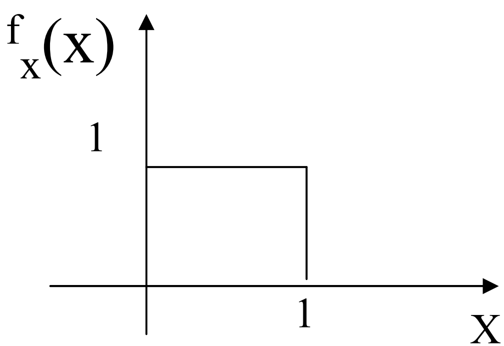
- Mapeamento entre funções de v.a.
  - $Y = g(X) \leftarrow\rightarrow X = g^{-1}(Y)$
  - Caso de função não decrescente:
    - $P(x \leq X \leq x+dx) = P(y \leq Y \leq y+dy)$
    - $P(X \leq x) = P(Y \leq y) \rightarrow g(x) \leq y_1$ para $x \leq x_1$
    - $F_x(x) = F_y(y)$
    - $d(F_x(x))/dy = d(F_y(y))/dy$
    - $f_y(y) = f_x(x).dx/dy$
    - $f_y(y) = f_x(g^{-1}(x)).dx/dy$

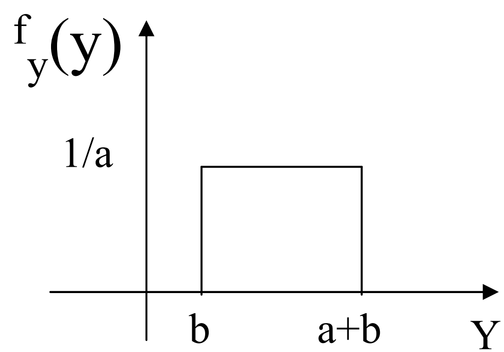


Funções de uma Variável Aleatória

- Mapeamento entre funções de v.a.
  - $Y = g(X) \leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$
  - Caso de função não decrescente:
    - $f_y(y) = f_x(x).dx/dy = f_x(g^{-1}(x)).dx/dy$
  - Exemplo:
    - $Y = aX + b \quad ; a>0$
    - $f_x(X)$ = uniforme entre 0 e 1.







Funções de uma Variável Aleatória

- Mapeamento entre funções de v.a.
  - $Y = g(X) \leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$
  - Caso de função não crescente:
    - $f_y(y) = -f_x(x).dx/dy = f_x(g^{-1}(x)).|dx/dy|$
  - Exemplo:
    - $Y = -aX + b \quad ; a>0$
    - $f_x(X)$ = uniforme entre 0 e 1.

Funções de uma Variável Aleatória

- Mapeamento entre funções de v.a.
  - $Y = g(X) \leftrightarrow X = g^{-1}(Y)$
  - Caso geral de função:
    - $f_y(y) = f_x(x_1).|dx_1/dy| + f_x(x_2).|dx_2/dy| + ...$
    - Opera-se em cada trecho onde a função é não crescente ou não decrescente.
  - Exemplo:
    - $Y = aX^2;\ a>0$
    - $f_x(X)$ = uniforme entre –1 e 1.
    - $f_x(X) = -X+1;\ 0<X<1$

      $= +X+1;\ -1<X<0$

      $= 0$; para os outros valores de X.