Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Tecnologia
Deptº de Engenharia de Computação e Automação

Contexto Social e Profissional da Engenharia

Material didático

Adelardo A. D. de Medeiros

Natal, outubro de 2004.

Capítulo 1

Contexto Social e Profissional da Engenharia

A disciplina de Contexto Social e Profissional da Engenharia procura fornecer aos alunos de Engenharia de Computação uma formação mínima em assuntos importantes para a sua futura atuação profissional e que não são diretamente relacionados à Engenharia ou à Computação. Os principais assuntos temas abordados na disciplina são:

- Matemática financeira e análise de investimentos
- Discussão de temas atuais de sociedade
- Metodologia científica
- Legislação profissional
- Prática de redação técnica e de apresentação de seminários

Esta apostila se propõe a ser uma referência bibliográfica mínima sobre alguns destes assuntos, mas sem qualquer pretensão de ser exaustiva. Informações mais completas podem ser encontradas na literatura específica da área [Sam02].

Capítulo 2

Matemática financeira

2.1 Introdução

Os fatores de produção podem ser divididos em trabalho, capital, terra e capacidade empresarial. Por sua participação em qualquer processo produtivo, a cada um desses fatores corresponde uma remuneração denominada *salário*, *juro*, *arrendamento* e *lucro*, respectivamente.

Portanto, o *juro* é definido como sendo a remuneração atribuida ao fator capital. Assim, ao se usar certo capital por determinado espaço de tempo, paga-se pelo uso desse fator uma quantia denominada juro, de forma que, no fim do prazo estipulado, se disponha não apenas da quantia emprestada, mas também de um acréscimo que corresponde ao custo de oportunidade do uso do capital durante o período de empréstimo.

O pagamento ao fator capital é expresso, normalmente, por uma taxa percentual que se refere, obrigatoriamente, a certo período de tempo. Essa taxa é chamada de *taxa de juros* e indica a remuneração do capital durante o período a que ela se refere, ou seja, ela expressa o preço cobrado pela utilização do capital durante o período considerado.

O período no fim do qual os juros são formados é denominado *período de capitalização*. Normalmente esse período de capitalização é igual àquele a que se refere a taxa de juros considerada, mas nem sempre este é o caso. Por exemplo, pode-se ter uma aplicação com período de capitalização mensal (ou seja, a cada mês são pagos juros), remunerada a uma taxa de juros expressa de forma anualizada (por exemplo, 12% ao ano). Neste caso, antes de se proceder aos cálculos, deve-se calcular a taxa de juros ao mês equivalente à taxa de juros ao ano.

Nas fórmulas de matemática financeira, as taxas de juros geralmente são apresentadas na forma unitária ou não-percentual (isto é, 0,15 e não 15%, por exemplo). Isso não é obrigatório, mas torna as fórmulas mais operacionais em razão da facilidade de cálculo.

2.2 Regimes de capitalização

A forma de remuneração do capital pode ser classificada de acordo com o *regime de capitalização*. Esta característica tem a ver com o processo de formação dos juros, que pode ser de forma contínua ou de forma descontínua (geralmente de forma periódica, neste último caso).

No regime de capitalização contínua, os juros são expressos por uma taxa r, chamada de taxa instantânea de juros, que indica o percentual de crescimento do capital em um intervalo infinitesimal. Formados a cada instante, os juros são incorporados ao capital inicial, passando o montante (capital + juros) a render juros imediatamente. O regime de capitalização contínua, que só é utilizado para modelar situações bastante específicas, não será tratado neste documento.

No sistema de capitalização periódica (que é o caso mais comum da capitalização descontínua), define-se um período discreto de tempo para se computarem juros sobre o capital. Conhecido como período de capitalização, o período discreto de tempo refere-se a um mês, três meses, um semestre, um ano, etc.

No sistema de capitalização periódica pode ocorrer a formação de juros simples ou de juros compostos. Os juros são simples quando, independentemente do período a que se referem, são computados apenas sobre o capital inicial;

neste caso, os juros formados no fim de cada período a que se refere a taxa não são incorporados ao capital, para também renderem juros no período seguinte. Assim, apenas o capital inicial rende juros. Os juros são compostos quando, no início do segundo período de referência, são computados não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros do primeiro período de referência. Neste caso, os juros formados no fim de um período rendem juros no período seguinte, pois são sistematicamente incorporados ao capital.

2.2.1 Juros simples

A fórmula básica para calcular o valor final ou *montante* após n períodos de capitalização (V_n) de uma quantia inicial ou capital inicial (V_0), colocada a juros simples, é:

$$V_n = V_0(1 + n \cdot j) \tag{2.1}$$

em que o período a que se refere a taxa unitária de juros j considerada deve ser igual ao período de capitalização. Verifica-se portanto que, no regime de juros simples, o capital cresce em progressão aritmética de razão $r = j \cdot V_0$ a partir do capital inicial V_0.

2.2.2 Juros compostos

A fórmula para calcular o montante em regime de juros compostos é:

$$V_n = V_0(1 + i)^n \tag{2.2}$$

em que i é a taxa de juros e as demais variáveis foram definidas anteriormente. Logo, verifica-se que, no regime a juros compostos, o capital inicial V_0 cresce em progressão geométrica com razão igual a $(1 + i)$.

Exemplo 2.2-A: Qual o valor presente correspondente a um montante (valor futuro) de 100,00 dentro de 3 meses, considerando-se juros compostos de 11% ao mês?

Esta questão pode ser melhor compreendida adotando-se a seguinte formulação equivalente: *Quanto eu deveria por hoje no banco em uma aplicação que rende 11% ao mês para que daqui a 3 meses eu disponha de 100,00?* O problema pode ser resolvido aplicando-se a fórmula 2.2:

$$100 = V_0 \cdot (1 + 0.11)^3 \quad \Rightarrow \quad V_0 = 73.12$$

2.2.3 Evolução do capital em diferentes regimes

Como no regime de juros compostos os juros se somam ao montante para render juros no período seguinte, este regime dá um maior crescimento ao capital que o sistema de juros simples. Isso fica evidenciado na tabela 2.1, onde se verifica a evolução ano a ano de um capital inicial de 100,00, aplicado a juros de 10% ao ano, para os dois regimes.

Tempo (anos)	Juros compostos	Juros simples
0	100,00	100,00
1	110,00	110,00
2	121,00	120,00
3	133,10	130,00
4	146,41	140,00
5	161,05	150,00
10	259,37	200,00
20	672,75	300,00
50	11.739,00	600,00
100	1.378.061,23	1.100,00

Tabela 2.1: Evolução do capital (100,00) de acordo com os regimes de capitalização para uma taxa de juros anual de 10%

Observa-se que as diferenças, para a taxa de juros considerada, não são grandes em períodos curtos de aplicação; contudo, crescem significativamente com o aumento do número de períodos de aplicação, ou seja, com o tempo.

2.3 Taxas de juros

As taxas de juros são expressas de diferentes maneiras no mercado financeiro. Freqüentemente, os juros são capitalizados mais de uma vez no período da taxa de juros. Quando isto ocorre, a taxa de juros é chamada de *taxa nominal*. São exemplos de taxas nominais:

- 18% ao ano capitalizada mensalmente;
- 5% ao mês capitalizada diariamente;
- 8% ao semestre capitalizada mensalmente.

Ao contrário da taxa nominal, a *taxa efetiva* pressupõe incidência de juros apenas uma única vez em cada período a que se refere a taxa; isto é, a unidade de referência de seu tempo coincide com a unidade de tempo dos períodos de capitalização. Como exemplos de taxas efetivas, temos as seguintes:

- 18% ao ano capitalizada anualmente;
- 5% ao mês capitalizada mensalmente;
- 0.5% ao dia capitalizada diariamente.

Quando o período da taxa de juros coincide com a periodicidade com que os juros são capitalizados, a taxa declarada é a própria taxa efetiva. Assim, evitando redundâncias, nos três últimos casos diz-se somente 18% a.a., 5% a.m. e 8% a.d., ficando subentendido o período de capitalização. Quando não se verifica essa coincidência entre os períodos, a taxa de juros costuma ser definida como taxa nominal.

A taxa nominal não incorpora as capitalizações intermediárias, sendo necessário o cálculo da taxa efetiva equivalente quando pretendemos efetuar cálculos e comparações no regime de juros compostos. No regime de juros simples, a taxa nominal e a taxa efetiva são equivalentes.

Se a taxa de juros for nominal, a taxa efetiva por período de capitalização (também conhecida como *taxa proporcional*) poderá ser determinada dividindo-se a taxa nominal pela freqüência de capitalizações. Assim, uma taxa nominal de 24% ao ano, capitalizada mensalmente, corresponde a uma taxa efetiva de 2% ao mês, pois há 12 períodos de capitalização (12 meses) no período em que a taxa nominal foi definida (1 ano).

2.3.1 Taxas equivalentes

Duas taxas são ditas equivalentes quando, ao serem aplicadas a determinado capital inicial, durante um mesmo prazo, produzem o mesmo juro ou montante no final do prazo considerado. O calculo da equivalência depende do regime de capitalização.

Para converter o período a que se refere uma taxa de juros simples, basta multiplicar ou dividir a taxa pelo número de períodos originais contidos no novo período. Assim, uma taxa de juros simples de 2% ao mês corresponde a uma taxa de 24% ao ano.

Para converter o período a que se refere uma taxa de juros composta em regime de capitalização periódica, o procedimento é um tanto mais complexo do que no regime de juros simples, conforme os exemplos 2.3-A e 2.3-B a seguir.

Exemplo 2.3-A: Uma taxa de juros compostos de 11% ao mês, capitalizados mensalmente, corresponde a que taxa anual, capitalizados anualmente?

Seja i_{m} a taxa ao mês e i_{a} a taxa ao ano. Sabe-se que após um ano (12 meses) tem-se:

$$V_{12} = V_0(1+i_{\mathrm{m}})^{12} = V_0(1+0.11)^{12} = 3.498V_0$$

Como se deseja uma taxa equivalente, deve-se calcular a taxa anual que, ao fim de um ano, leve ao mesmo montante final:

$$V_1 = V_0(1+i_{\mathrm{a}})^1 = 3.498V_0 \quad \Rightarrow \quad i_{\mathrm{a}} = 2.498$$

Portanto, a taxa de 11% ao mês corresponde a uma taxa anual de 249,8%. É importante ressaltar que, caso se cometesse o erro comum de simplesmente multiplicar a taxa mensal por 12, obter-se-ia um valor muito inferior (132%) para a taxa anualizada.

Exemplo 2.3-B: Uma taxa de juros nominal de 60% ao ano, capitalizados mensalmente, corresponde a que taxa efetiva anual no regime de juros compostos?

A taxa efetiva mensal é de:

$$i = \frac{60\%}{12} = 5\% \text{ a.m.} = 0.05 \text{ a.m.}$$

Usando o mesmo raciocínio do exemplo 2.3-A, conclui-se que:

$$1 + i_a = (1 + i_m)^{12} \quad \Rightarrow$$
$$1 + i_a = 1.05^{12} \quad \Rightarrow \quad i_a = 0.7959$$

Portanto, a taxa nominal de 60% a.a., capitalizada mensalmente, corresponde a uma taxa efetiva de 79.59% a.a.

2.4 Parcelas

Parcelas são pagamentos (ou recebimentos) realizados em épocas distintas, destinadas a construir capital ou amortizar. As parcelas podem ser classificadas nas seguintes categorias:

Periódicas e não-periódicas: as parcelas são *periódicas* quando são separadas por intervalos de tempo constantes. Quando isso não ocorre, as parcelas são *não-periódicas*.

Constantes e variáveis: as parcelas são ditas *constantes* quando seus valores são iguais; *variáveis*, quando seus valores também o forem.

Temporárias e perpétuas: as parcelas *temporárias* são aquelas cujo horizonte finito é definido. Parcelas *perpétuas* são aquelas cujo horizonte não é definido, ou seja, o número de parcelas, valores ou pagamentos é infinito.

Imediatas e diferidas: as parcelas são *imediatas* quando o vencimento do primeiro pagamento ocorre a partir do primeiro período de tempo; são *diferidas* quando o mesmo vencimento ocorre a partir do d-ésimo período de tempo, sendo d (> 1) o deferimento ou prazo de carência.

Antecipadas e postecipadas: a parcela é *antecipada* se ocorrer no inicio do período de tempo a ela correspondente; é *postecipada* se ocorrer no fim do período.

Serão abordadas apenas as parcelas periódicas e constantes, uma vez que as parcelas não-periódicas e/ou variáveis são pouco freqüentes e, além disso, não podem ser estudadas de forma geral, sendo necessário conhecer-se a forma específica de variação da periodicidade e/ou do valor das parcelas.

O interesse maior no estudo de parcelas é o cálculo do montante único equivalente ao conjunto de parcelas. Este montante depende do regime de capitalização. Adotaremos o regime de juros compostos, pois o regime a juros simples não é muito utilizado e não oferece muitas dificuldades de estudo.

2.4.1 Parcelas temporárias, imediatas e postecipadas

A figura 2.1 representa uma série de m parcelas imediatas de valor R, em que a primeira parcela ocorre no fim do primeiro período de tempo (postecipadas).

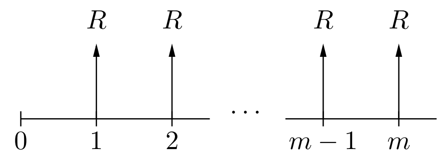

Figura 2.1: Parcelas temporárias, imediatas e postecipadas

O valor atual de um conjunto de parcelas na capitalização contínua é a soma dos valores de suas parcelas, descontadas continuamente a determinada taxa de juros. A fórmula 2.2 permite calcular o montante de uma quantia qualquer, podendo ser reescrita para calcular o valor atual da n-ésima parcela de valor R:

$$V_0 = V_n \cdot (1+i)^{-n} \quad \Rightarrow \quad R_0 = R \cdot (1+i)^{-n}$$

A soma dos valores atuais de todas as m parcelas é portanto dada por:

$$V_0 = R \cdot (1+i)^{-1} + R \cdot (1+i)^{-2} + \cdots + R \cdot (1+i)^{-m}$$

Fazendo-se $a = (1+i)^{-1}$:

$$V_0 = R \cdot a + R \cdot a^2 + \cdots + R \cdot a^m$$

Multiplicando-se a equação anterior por a:

$$V_0 \cdot a = R \cdot a^2 + R \cdot a^3 + \cdots + R \cdot a^{m+1}$$

Finalmente, subtraindo-se as duas equações anteriores, chega-se a:

$$V_0 \cdot a - V_0 = R \cdot a^{m+1} - R \cdot a \quad \Rightarrow$$
$$V_0 = R\left[\frac{a(a^m - 1)}{a-1}\right] \quad \Rightarrow$$
$$V_0 = R\left[\frac{(1+i)^{-1}[(1+i)^{-m} - 1]}{(1+i)^{-1} - 1}\right] \quad \Rightarrow$$
$$V_0 = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right] \tag{2.3}$$

O montante (valor final) de um conjunto de parcelas pode ser calculado a partir das fórmulas 2.2 e 2.3:

$$V_m = V_0 \cdot (1+i)^m \quad \Rightarrow$$
$$V_m = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right](1+i)^m \quad \Rightarrow$$
$$V_m = R\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] \tag{2.4}$$

Exemplo 2.4-A: Um trator custa 80.000,00 a vista, mas também pode ser em 15 parcelas anuais de 10.000,00. Considerando-se juros compostos de 10% ao ano e primeira parcela ocorrendo no fim do primeiro ano, pede-se determinar a melhor opção de compra.

Para se verificar a melhor opção de compra, é necessário calcular o valor atual das 15 prestações, para compará-lo com o valor do trator a vista. O valor atual das prestações pode ser determinado pela aplicação da fórmula 2.3:

$$V_0 = 10.000\left[\frac{1-(1.1)^{-15}}{0.1}\right] = 76060.80$$

Observa-se que o valor atual das prestações é menor que o valor a vista. Dessa forma, recomenda-se optar pela compra a prazo.

Exemplo 2.4-B: Uma financeira se propõe a financiar um artigo que custa 800,00 em 6 prestações anuais de igual valor, sendo a primeira parcela paga ao final do primeiro ano. Sabendo que a instituição opera com juros de 2% ao mês, calcule o valor das prestações.

Como nada foi dito em relação ao regime de capitalização, deve-se supor que se trata de capitalização periódica com juros compostos, que é o padrão no mercado. Então faz-se necessário inicialmente converter a taxa mensal para sua equivalente anual:

$$(1+i_{\mathrm{m}})^{12} = (1+i_{\mathrm{a}})^1 \quad \Rightarrow$$
$$i_{\mathrm{a}} = 1.02^{12} - 1 = 0.2682$$

O valor das prestações pode então ser calculado pela fórmula 2.3:

$$V_0 = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right] \quad \Rightarrow$$
$$800 = R\left[\frac{1-1.2682^{-6}}{0.2682}\right] \quad \Rightarrow \quad R = 282.48$$

Exemplo 2.4-C: Uma loja vende bens financiados em prestações mensais (imediatas e postecipadas). A taxa é de 7% ao mês. Para facilitar o trabalho dos vendedores na hora de informar o cliente sobre o valor das prestações, foram calculados coeficientes que, multiplicados pelo valor do bem, dão diretamente o valor da parcela. Calcule estes coeficientes para financiamentos entre 1 e 12 meses.

Tomando-se como exemplo o financiamento em 3 parcelas e usando-se a fórmula 2.3:

$$R = \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-m}}\right]V_0 \quad \Rightarrow$$
$$R = \left[\frac{0.07}{1-1.07^{-3}}\right]V_0 \quad \Rightarrow \quad R = 0.3811 \cdot V_0$$

Portanto, para se saber o valor da prestação no financiamento em 3 meses, basta que se multiplique o valor do bem por 0,3811. Os demais coeficientes estão indicados na tabela 2.2.

Exemplo 2.4-D: Um bem que custa 400,00 pode ser comprado em 12 prestações mensais de

Meses	Coeficiente	Meses	Coeficiente
1	1.0700	7	0.1856
2	0.5531	8	0.1675
3	0.3811	9	0.1535
4	0.2952	10	0.1424
5	0.2439	11	0.1334
6	0.2098	12	0.1259

Tabela 2.2: Coeficientes de cálculo de parcelas em financiamento com taxas de 7% ao mês.

40,00, sendo a primeira parcela paga ao fim do primeiro mês. Qual a taxa de juros empregada?

Aplicando-se a fórmula 2.3:

$$400 = 40\left[\frac{1-(1+i)^{-12}}{i}\right] \quad \Rightarrow$$
$$10i + (1+i)^{-12} = 1$$

Esta equação não tem solução analítica, devendo ser resolvida por métodos numéricos, o que leva ao resultado 0.0292. Está portanto embutida nestas prestações uma taxa de juros de 2.92% ao mês.

2.4.2 Parcelas diferidas

Conforme definido, as parcelas diferidas são aquelas que apresentam um período de carência. Desse modo, nos períodos iniciais de referência da taxa de juros ocorrem capitalizações, mas não parcelas (pagam-se juros, mas não se amortiza a dívida). A situação é esquematizada na figura 2.2, para m parcelas com carência d.

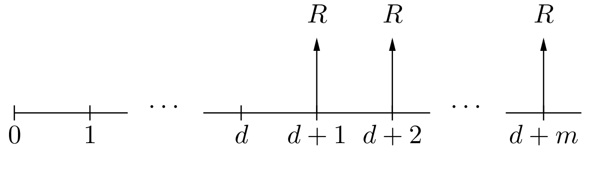

Figura 2.2: Parcelas temporárias, diferidas e postecipadas

O valor atual V_0 de uma série de parcelas diferidas pode ser calculado em dois passos:

1. Calcula-se V_d, o valor da série de parcelas no instante d, pela fórmula 2.3.

2. Calcula-se V_0, o valor atual correspondente ao valor V_d no instante d, pela fórmula 2.2

$$V_d = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right] = V_0 \cdot (1+i)^d \quad \Rightarrow$$
$$V_0 = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i(1+i)^d}\right] \tag{2.5}$$

O valor futuro de parcelas diferidas no instante $d+m$ é igual ao valor futuro de parcelas imediatas no instante m:

$$V_{d+m} = R\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] \tag{2.6}$$

Exemplo 2.4-E: Um conhecido me pediu um empréstimo de 1.000,00, comprometendo-se a pagar os mesmos juros da minha aplicação financeira. O empréstimo será quitado em 5 prestações, sendo a primeira paga dentro de 4 meses. Calcule o valor da parcela, supondo que meu dinheiro está rendendo 1.5% ao mês.

A parcela é dada pela fórmula 2.5, onde o número de parcelas é $m = 5$ e a carência é $d = 3$. Note-se que, apesar de a primeira parcela ser paga daqui a 4 meses, a carência é de 3 meses, pois um dos meses corresponde ao mês de prazo normal nas parcelas postecipadas. Com isso:

$$V_0 = R\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i(1+i)^d}\right] \quad \Rightarrow$$
$$1000 = R\left[\frac{1-1.015^{-5})}{0.015 \cdot 1.015^3}\right] \quad \Rightarrow$$
$$R = 218.64$$

Portanto, meu conhecido deve pagar-me cinco parcelas de 218,64.

2.4.3 Parcelas antecipadas

Ao se tratar de parcelas antecipadas, a primeira parcela ocorre no início do primeiro período de tempo, e não no fim. A figura 2.3 representa uma série de m parcelas imediatas e antecipadas de valor R, e indica como esta série de parcelas pode ser decomposta em um desembolso de R

no instante 0 mais uma série de $m-1$ parcelas a partir do instante 1. Logo, parcelas antecipadas podem ser decompostas em um desembolso único mais uma série de parcelas postecipadas.

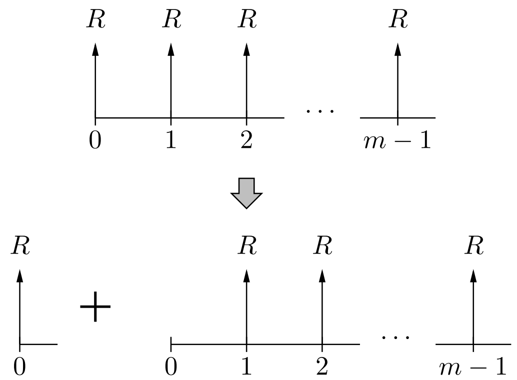

Figura 2.3: Parcelas temporárias, imediatas e antecipadas

O valor atual de parcelas antecipadas é portanto dado pelo valor do primeiro pagamento somado ao valor atual das $m-1$ parcelas restantes, que é calculado pela fórmula 2.3:

$$V_0 = R + R\left[\frac{1-(1+i)^{-(m-1)}}{i}\right] \quad \Rightarrow$$

$$V_0 = R(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right] \tag{2.7}$$

De maneira similar, demonstra-se que o valor futuro de parcelas antecipadas é dado por:

$$V_m = R(1+i)\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] \tag{2.8}$$

Comparando-se as fórmulas 2.7 e 2.8 com as fórmulas 2.3 e 2.4, chega-se à conclusão que elas diferem apenas por um termo $(1+i)$. Este termo representa o período adicional de rendimento que as parcelas antecipadas têm em relação às postecipadas.

Exemplo 2.4-F: Um rico empresário deixou para seu filho único uma herança de 300.000,00, porém determinou que a herança deve ser paga em 5 parcelas anuais iguais, sendo a primeira delas paga na abertura do inventário e o saldo restante investido em um fundo que rende 10% ao ano. Quanto o inventariante deve pagar por nao ao herdeiro para cumprir o testamento?

Sendo a primeira parcela paga no início do primeiro ano, o que caracteriza parcelas antecipadas, utiliza-se a fórmula 2.7:

$$V_0 = R(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-m}}{i}\right] \quad \Rightarrow$$

$$300000 = 1.1R\left[\frac{1-1.1^{-5}}{0.1}\right] \quad \Rightarrow$$

$$R = 71944.77$$

O inventariante deve portanto pagar imediatamente 71.944,77 ao herdeiro e aplicar o restante, o que lhe permitirá fazer os 4 outros pagamentos do mesmo valor ao fim de cada ano.

2.4.4 Parcelas diferidas e antecipadas

Parcelas antecipadas com carência d são equivalentes a parcelas postecipadas com carência $d-1$, de modo que não requerem um estudo especial.

2.4.5 Parcelas perpétuas

As parcelas são perpétuas quando o seu número é infinito. O estudo deste tipo de parcela é portanto feito fazendo-se m (número de parcelas) tender a infinito nas fórmulas deduzidas para parcelas temporárias.

Vai-se concluir que o valor atual de uma série composta de um número infinito de parcelas constantes é finito se a taxa de juros não for nula. Por outro lado, o seu valor final é infinito, como é de se esperar.

Fazendo-se $m \to \infty$ na fórmula 2.3, deduz-se que o valor atual de parcelas perpétuas imediatas e postecipadas é:

$$V_0 = \frac{R}{i} \tag{2.9}$$

Para parcelas diferidas, faz-se o mesmo com a fórmula 2.5:

$$V_0 = \frac{R}{i(1+i)^d} \tag{2.10}$$

Finalmente, para parcelas antecipadas obtém-se a partir da fórmula 2.7 o resultado:

$$V_0 = \frac{R(1+i)}{i} \tag{2.11}$$

Exemplo 2.4-G: Qual o valor atual de um investimento que paga 1.000,00 a cada ano, considerando-se juros compostos, horizontes de 5, 10, 20, 50 anos e pagamentos perpétuos, juros de 2%, 10% e 40% ao ano e o primeiro pagamento ocorrendo no fim do primeiro ano?

O valor atual pode ser conseguido pelas fórmulas 2.3 (horizonte finito) e 2.9 (horizonte infinito). Por exemplo, com taxa de 10%, os valores atuais para 20 anos (V_0^{20}) e pagamentos perpétuos (V_0^{∞}) são dados respectivamente por:

$$V_0^{20} = 1000\left[\frac{1-1.1^{-20}}{0.1}\right] = 8.513,56$$
$$V_0^{\infty} = \frac{1.000}{0.1} = 10.000,00$$

Todos os valores calculados estão apresentados no quadro 2.3.

Duração (anos)	Taxa de juros (%)		
	2	10	40
5	4.713,46	3.790,79	2.035,16
10	8.982,59	6.144,57	2.413,57
20	16.351,43	8.513,56	2.497,01
50	31.423,61	9.914,81	2.500,00
∞	50.000,00	10.000,00	2.500,00

Tabela 2.3: Valor atual de um investimento que paga 1.000,00 por ano com diferentes taxas de juros e vários horizontes de pagamento.

Algumas considerações gerais podem ser feitas com base nos resultados apresentados na tabela 2.3. Nota-se que, para uma mesma taxa de juros, quanto maior o horizonte, maior é o valor atual da série de parcelas, o que seria de se esperar. Entretanto, à medida que o horizonte aumenta, esses acréscimos ficam cada vez menores. Isso acontece em virtude de, no ano zero, as parcelas apresentam valores descontados menores à medida que sua ocorrência se dá em épocas mais distantes da época atual, que é considerada como referência.

Comparando a evolução dos valores atuais da série de parcelas, levando em conta diversas taxas de juros, pode-se notar que, à medida que a taxa aumenta, menores são os acréscimos causados pelo alargamento do horizonte considerado. Por exemplo, à taxa de 2% ao ano, o valor atual da série é de 31.423,61 para o horizonte de 50 anos, enquanto para o horizonte infinito o valor atual é de 50.000,00. Já para uma taxa de juros de 40% ao ano, os valores são 2.500,00 e 2.500,00, para horizonte de 50 anos e infinito, respectivamente. Nota-se que, a uma taxa de 40% ao ano, o horizonte de 50 anos pode ser considerado infinito, o que não ocorre a uma taxa de 2% ao ano. Sendo assim, pode-se dizer que, quanto maior a taxa de juros, menor o horizonte que pode ser considerado infinito. Isto acontece em virtude de a elevação da taxa de juros produzir valores atuais insignificantes para parcelas cada vez mais próximas da época atual.

Exemplo 2.4-H: Uma área de extração de madeira proporciona rendimentos líquidos de 10.000,00 a cada 7 anos. Considerando-se juros de 10% ao ano e o primeiro rendimento ocorrendo no fim do sétimo ano, pede-se determinar o valor mínimo de venda deste empreendimento (equivalente ao valor atual dos rendimentos), levando-se em conta um horizonte infinito.

Inicialmente deve-se calcular a taxa de juros equivalente a uma taxa de 10% a.a. para um período de capitalização de 7 anos:

$$(1+i_1)^7 = 1 + i_7 \quad \Rightarrow \quad i_7 = 1.1^7 - 1 = 0.9487$$

Em seguida calcula-se o valor presente da série de parcelas:

$$V_0 = \frac{10.000}{0.9487} = 10.540,55$$

É interessante que se note que o valor do negócio é pouco superior ao que ele rende a cada 7 anos.

Exemplo 2.4-I: Qual o montante que deve ser acumulado para garantir a um poupador uma aposentadoria mensal de 2.000,00 pelo resto da vida? Considere a rentabilidade média da poupança, que é de 6% ao ano (taxa efetiva).

E necessário inicialmente converter a taxa efetiva anual para taxa efetiva mensal, já que a retirada vai ser feita todo mês:

$$(1+i_m)^{12} = 1 + i_a \quad \Rightarrow$$
$$i_{\mathrm{m}} = 1.06^{1/12} - 1 = 0.004868$$

Em seguida, o montante atual que garante as retiradas pode ser calculado pela fórmula 2.9:

$$V_0 = \frac{R}{i} = \frac{2000}{0.004868} = 410.884,28$$

Este montante garante a retirada independentemente de quantos anos o poupador viva depois da acumulação do capital. Caso se queira garantir as retiradas por um período limitado de tempo, a fórmula 2.3 deve ser empregada.

Exemplo 2.4-J: Suponha que o poupador do exemplo 2.4-I deposite mensalmente uma quantia em um fundo de previdência privada para acumular o capital necessário para garantir a sua aposentadoria. Estes depósitos começaram quando o poupador tinha 25 anos e devem acontecer até ele completar 60 anos, data em que pretende se aposentar. De quanto deve ser o depósito mensal para garantir a acumulação do capital necessário? Considere a mesma rentabilidade da poupança do exemplo 2.4-I

A taxa mensal em capitalização contínua é de $r = 0.004868$. Os depósitos vão ser feitos durante 60-25 = 35 anos = 420 meses. O que se deseja é determinar o valor das parcelas neste período de tal forma que o valor futuro destas parcelas seja igual ao montante determinado no exemplo 2.4-I. Usando-se a fórmula 2.4:

$$V_m = R\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i}\right] \quad \Rightarrow$$
$$410.884,28 = R\left[\frac{1.004868^{420} - 1}{0.004868}\right] \quad \Rightarrow$$
$$R = 299.13$$

O cálculo dos exemplos 2.4-I e 2.4-J é aproximadamente o que é feito pelas instituições de previdência privada.

Exercícios

A. Em quanto tempo triplica uma população que cresce à taxa de 3% a.a.?

B. Pretende-se daqui a seis meses comprar um automóvel por 25.000,00. Calcular a aplicação necessária a ser efetuada hoje em um investimento que rende juros efetivos de 2,5% ao mês, de modo que o veículo possa ser comprado:

1. com o *montante* da aplicação;
2. com os *juros ganhos* na aplicação.

C. Duas dívidas de 20.000,00 e 30.000,00 com vencimento em 2 e 4 meses, respectivamente, serão liquidas por meio de um único pagamento em 3 meses. Considerando-se juros efetivos de 5% a.m., calcular o valor deste pagamento.

D. Dada uma taxa efetiva de 48% a.a., determinar a taxa equivalente ao mês e ao semestre.

E. Um presidência da República de um certo país prometeu dobrar o valor real do salário mínimo em seus quatro anos de mandato.

1. Qual percentual de aumento deveria ser dado a cada ano para cumprir a promessa?
2. Dado que nos dois primeiros anos os aumentos reais foram de 1,23% e 1.73%, de quanto deve ser o aumento nos dois anos restantes?

F. Uma pessoa deposita 500,00 todo mês em um fundo de investimento que paga juros efetivos de 120% a.a., capitalizados mensalmente. Calcular o montante da aplicação no fim do 16^o mês.

G. Um automóvel cujo valor à vista é de 30.000,00 será pago por meio de uma entrada de 20%, 18 prestações mensais de 1.800,00 e quatro parcelas semestrais. A juros efetivos de 3% a.m., calcular o valor das parcelas semestrais.

H. Um eletrodoméstico será pago por meio de uma entrada mais 12 prestações mensais iguais e consecutivas. Se cada prestação é igual a 10% do valor a vista, sendo a primeira paga logo ao término de um período de carência 4 meses (120 dias) e considerando uma taxa de juros efetiva de 4% a.m., calcular o percentual sobre o valor a vista que deve ser pago como entrada.

I. Por política de crédito nas vendas a prazo, uma loja aumenta em 25% o valor a vista. Desse valor aumentado, 10% é pago como entrada e o saldo restante é dividido em 6 parcelas mensais iguais. Determinar a taxa de juros efetiva mensal cobrada no financiamento.

J. Um mutuário deverá reembolsar um empréstimo por meio de 25 prestações mensais de 2.000,00 cada. Querendo abreviar em um ano o prazo de quitação, o mutuário propõe efetuar um pagamento extraordinário juntamente com a sexta prestação. A juros efetivos de 1% a.m., determinar o valor desse pagamento.

K. Um homem de 35 anos aplica 300,00 por mês em um investimento que rende 1% ao mês em capitalização periódica (juros compostos).

1. Quanto terá disponível no banco quando completar 65 anos?
2. Calcule a retirada mensal possível após 65 anos supondo:
   (a) expectativa de vida de 80 anos;
   (b) rendimentos eternos.
3. Refaça os cálculos dos itens 1 e 2 supondo que, após os 50 anos de idade, a taxa de juros baixou de 1% para 0,7% ao mês.

L. Caso uma financeira resolvesse conceder empréstimos a juros de 2,0% ao mês para financiamentos pagos em 12 parcelas mensais, qual seria o coeficiente que, multiplicado pelo montante emprestado, permitiria calcular o valor da prestação nas seguintes situações:

1. a primeira prestação é paga como entrada;
2. a primeira prestação é paga após 30 dias;
3. a primeira prestação é paga após 90 dias.

M. Ao anunciar um financiamento para aquisição de automóvel em 36 prestações mensais, a financeira informa que a prestação pode ser calculada multiplicando-se o valor a ser financiado pelo coeficiente 0,0375, sendo a primeira prestação paga em 30 dias. Qual a taxa de juros (mensal e anual) praticada pela financeira, supondo capitalização periódica com juros compostos.

Referências Bibliográficas

[Sam02] Carlos Patricio Samanez. *Matemática Financeira – Aplicações à Análise de Investimentos*. Prentice Hall, São Paulo, 3 edition, 2002.